ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Rattrapage Juillet 2011

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** ..... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Arithmétiques** ..... **2.5 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** ..... **4 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** ..... **6 points**
- Exercice 5 : **Problème d'analyse** ..... **4 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3.5pts)

Soit x et y deux nombres de l'intervalle $I =]0,1[$, on pose $x * y = \dfrac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur I.

0.5 pt **b)** Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

0.5 pt **c)** Montrer que $(I, *)$ admet un élément neutre à déterminer.

0.5 pt **2 -** Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.

3 - On considère les deux ensembles suivants : $\mathbb{H} = \{2^n / n \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathbb{K} = \left\{\dfrac{1}{2^n+1}\right.$

0.5 pt **a)** Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

b) On considère l'application φ définie par : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x+1} \end{array}$

0.5 pt Montrer que l'application φ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{H}, \times)$ dans $(I, *)$.

0.5 pt **c)** Déduire que $(\mathbb{K}, *)$ est un sous groupe du groupe $(I, *)$.

Exercice 2 : (2.5 pts)

Soit x un nombre entier naturel vérifiant $10^x \equiv 2[19]$.

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que : $10^{x+1} \equiv 1[19]$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $10^{18} \equiv 1[19]$.

2 - Soit d le pgcd des nombres 18 et $x+1$

0.75 pt **a)** Montrer que : $10^d \equiv 1[19]$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $d = 18$.

0.5 pt **c)** Déduire que : $x \equiv 17[18]$.

Exercice 3 : (4 pts)

Partie I :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation suivante (E) : $z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$

0.5 pt **1 -** Vérifier que $-2i$ est une solution de l'équation (E).

0.5 pt **2 -** Déterminer les deux nombres complexes α et β tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

0.5 pt **3 - a)** Déterminer les deux racines carrées du nombre $5 - 12i$.

0.5 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

htt
Yasine El
https://steinmath.com an yesterday, tomorrow better than today

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère les points A, B, et C d'affixes respectifs $a = -1 + 3i$, $b = -2i$ et $c = 2 + i$.

0.5 pt **1 -** Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en C.

2 - On considère la rotation $\mathcal{R}_1$ de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et la rotation $\mathcal{R}_2$ de centre A et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$. Soit M un point du plan complexe d'affixe z et M_1 son image par la rotation $\mathcal{R}_1$ et M_2 son image par la rotation $\mathcal{R}_2$

0.5 pt **a)** Vérifier que l'écriture complexe de la rotation $\mathcal{R}_1$ est $z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) z - \sqrt{3} - i$.

0.5 pt **b)** Déterminer z_2 l'affixe de M_2 en fonction de z.

0.5 pt **c)** Déduire que le point I, le milieu du segment $[M_1M_2]$, est un point fixe.

Exercice 4 : (6 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. (On prend : $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1\text{cm}$)

1 pt **1 -** Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$.

0.25 pt **2 - a)** Donner le tableau de variation de la fonction f.

0.75 pt **b)** Montrer que f est une bijection de l'intervalle $]0;+\infty[$ vers un intervalle J à déterminer, puis donner le tableau de variation de la bijection réciproque f^{-1}.

0.75 pt **3 -** Calculer $f(1)$ et $f(e)$ puis construire (C) et (C') la courbe représentative de la fonction f^{-1} dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

0.5 pt **4 - a)** Calculer l'intégral $\int_1^{1+e} f^{-1}(x)\mathrm{d}x$. (On peut poser : $t = f^{-1}(x)$)

0.5 pt **b)** Déduire l'aire du domaine plan limité par (C^{-1}) et les droites $x = 1$, $x = e+1$ et $y = x$.

5 - pour tout entier naturel non nul n, on considère l'équation (E_n) : $x + \ln x = n$

0.25 pt **a)** Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution x_n.

0.5 pt **b)** Déterminer la valeur de x_1 puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

0.5 pt **6 - a)** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ f(x_n) \leq f(n)$ puis déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ x_n \leq n$.

0.5 pt **b)** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ n - \ln n \leq x_n$

0.5 pt **c)** Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{x_n - n}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{x_n}{n - \ln n}\right)$.

Yassine Elamri

Exercice 5 : (4 pts)

Soient n un entier non nul et f_n une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

0.5 pt **1 -** Montrer que pour $n \geq 2$, il existe un unique réel α_n de l'intervalle $]0;1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

0.75 pt **2 -** Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante et déduire qu'elle est convergente.

0.5 pt **3 - a)** Vérifier que pour $t \neq 1$, On a : $1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1} = \dfrac{1}{1-t} - \dfrac{t^n}{1-t}$.

0.5 pt **b)** Déduire que $\alpha_n + \dfrac{(\alpha_n)^2}{2} + \dfrac{(\alpha_n)^3}{3} + \cdots + \dfrac{(\alpha_n)^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \displaystyle\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$.

0.5 pt **4 - a)** Montrer que : $(\forall n \geq 2)\ ;\ 1 + \ln(1-\alpha_n) = -\displaystyle\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \geq 2)\ ;\ 0 \leq \displaystyle\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$.

0.75 pt **c)** En déduire que $l = 1 - e^{-1}$, où $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

FIN

Yassine Elamri