ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2011

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** ..... **4 points**
- Exercice 2 : **Arithmétiques** ..... **2.5 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** ..... **3.5 points**
- Exercice 4 : **Exercice d'analyse** ..... **6.5 points**
- Exercice 5 : **Exercice d'analyse** ..... **3.5 points**

Yassine Elamri

Exercice 1 : (4 pts) (Les deux parties sont indépendantes)

Partie I : Dans l'anneau $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ on considère les deux matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(On pose : $A^0 = I$ $A^1 = A$ $A^2 = A \times A$ $A^{n+1} = A^n \times A$ pour tout n de $\mathbb{N}$)

0,5 pt **1 -** Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N})\,;\ A^{2k} = I$.

0,5 pt **2 -** Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} que l'on déterminera.

Partie II : Soit a un nombre réel .

Pour tout x et y de l'intervalle $I =]0; +\infty[$ on pose : $x * y = (x-a)(y-a) + a$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I .

0,5 pt **b)** Montrer que $*$ est une loi commutative et associative.

0,5 pt **c)** Montrer que $(I, *)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

0,5 pt **2 -** Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.

3 - On considère l'application : $\begin{array}{rccc} \phi & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{x-a} \end{array}$

0,5 pt **a)** Montrer que ϕ est un isomorphisme de $(I, *)$ vers $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

0,5 pt **b)** Résoudre dans l'ensemble I l'équation : $x^{(3)} = a^2 + a$ où $x^{(3)} = x * x * x$.

Exercice 2 : (2.5 pts)

Soit N l'entier naturel dont l'écriture dans la base décimale est : $N = \underbrace{11.....1}_{\text{2010 fois 1}}$

0,25 pt **1 -** Montrer que le nombre N est divisible par 11 .

0,75 pt **2 - a)** Vérifier que le nombre 2011 est premier et que : $10^{2010} - 1 = 9N$.

0,5 pt **b)** Montrer que le nombre 2011 divise le nombre $9N$.

0,5 pt **c)** En déduire que le nombre 2011 divise le nombre N .

0,5 pt **3 -** Montrer que le nombre N est divisible par 22121.

Exercice 3 : (3.5 pts)

Première Partie : Soit m un nombre complexe non nul. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnu z : (E_m) : $z^2 + [(1-\mathrm{i})m - 4]z - \mathrm{i}m^2 - 2(1-\mathrm{i})m + 4 = 0$.

0,5 pt **1 -** Vérifier que le nombre $z_1 = -m + 2$ est solution de l'équation $(E - m)$.

2 - Soit z_2 la deuxième solution de l'équation (E_m) .

0,5 pt **a)** Montrer que : $z_1.z_2 = 1 \iff im^2 + 2(1+\mathrm{i})m - 3 = 0$.

Yassine Elamri

1 pt **b)** Déterminer les deux valeurs de m pour lesquelles on a : $z_1.z_2 = 1$.

Deuxième Partie : Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère l'application S qui au point M, d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe z' , tel que : $z' - 1 = -(z-1)$ et la rotation R de centre le point Ω d'affixe $(1 + i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et soit z'' l'affixe du point $M'' = R(M)$.

0,25 pt **1 - a)** Montrer que l'application S est la symétrie centrale de centre le point d'affixe 1 .

0,25 pt **b)** Montrer que : $z'' = iz + 2$

2 - Soit A le point d'affixe 2 . On suppose que le point M est distinct du point O origine du repère.

0,5 pt **a)** Calculer : $\frac{z''-2}{z'-2}$, en déduire la nature du triangle $AM'M''$.

0,5 pt **b)** Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels les points A , Ω , M' et M'' sont cocycliques.

Exercice 4 : (6.5 pts)

Première Partie : Étude des solutions positives de l'équation (E) : $e^x = x^n$ **avec** n **un entier naturel non nul.**

On considère la fonction numérique f définie sur l'ensemble $D = [0;1[\bigcup]1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

0,25 pt **1 -** Vérifier que pour tout x de l'ensemble $D = [0;1[\bigcup]1;+\infty[$ on a : $e^x = x^n \iff n = f(x)$.

0,5 pt **2 -** Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0 .

1,5 pt **3 -** Calculer les limites : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ensuite interpréter graphiquement les résultats obtenus.

4 - Étudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $[0;1[$ et $]1;+\infty[$ puis

0,75 pt donner son tableau de variations.

0,5 pt **5 -** Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées

0,5 pt **6 -** Représenter graphiquement $(\mathcal{C})$.

0,5 pt **7 -** Montrer que pour $n \geq 3$, l'équation (E) admet exactement deux solutions a_n et b_n tel que : $1 < a_n < e < b_n$.

Deuxième Partie : Étude des deux suites $(a_n)_{n\geq 3}$ **et** $(b_n)_{n\geq 3}$ **.**

0,5 pt **1 -** Montrer que : $(\forall n \geq 3)\,;\quad b_n \geq n$, en déduire la limite de la suite $(b_n)_{n\geq 3}$.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \geq 3)\,;\quad \frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$.

0,5 pt **c)** Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n = e$.

Yassine Elamri

Exercice 5 : (3.5 pts)

On considère le fonction numérique F définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $F(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall x \geq 0)\,;\quad 0 \leq F(x) \leq x\mathrm{e}^{-x^2}$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x \geq 1)\,;\ \mathrm{e}^{-x^2} \leq$

0,5 pt **2 -** Montrer que la fonction F est dériv

$(\forall x \geq 0)\quad F'(x) = \mathrm{e}^{-2x^2} - 2xF(x)$

3 - On considère la fonction G définie

$$\begin{cases} G(x) \\ G(\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

0,25 pt **a)** Montrer que la fonction G est c

0,75 pt **b)** Montrer qu'il existe un réel c de

$F(c) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2c^2}}{2c}$.

(On pourra appliquer le théor

4 - On considère la fonction numérique

0,5 pt **a)** Montrer que la fonction H est s

0,5 pt **b)** En déduire que c est unique, pu

htt

Yassi

FIN

https://steinmath.com er than yesterday, tomorrow better than today