ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Rattrapage Juillet 2012

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** ..... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Arithmétiques** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** ..... **7.5 points**
- Exercice 5 : **Problème d'analyse** ..... **2.5 points**

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3.5 pts) (Les parties I et II sont indépendantes.)

partie I :

Pour tous a et b de l'intervalle $I = [1; +\infty[$, on pose : $a \perp b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2$

0.5 pt **1 -** Montrer que $\perp$ est une loi de composition interne sur I.

0.5 pt **2 -** Montrer que la loi $\perp$ est commutative et associative.

0.25 pt **3 -** Montrer que $\perp$ admet un élément neutre à déterminer.

partie II :

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire. Soit $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}^* \right\}$

0.5 pt **1 -** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

2 - On considère l'application φ définie par : $\varphi : \mathbb{R}^* \longrightarrow E$, $x \longmapsto M(x)$

0.5 pt **a)** Montrer que l'application φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(E, \times)$

0.5 pt **b)** En déduire la structure de $(E, \times)$.

0.75 pt **c)** Montrer que l'ensemble $H = \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / n \in \mathbb{Z} \right\}$ est un sous groupe de $(E, \times)$.

Exercice 2 : (3.5 pts) (Les parties I et II sont indépendantes.)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

partie I :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation suivante : (E) : $z^2 - 4(1 + \frac{2}{3}i)z + \frac{5}{3} + 4i = 0$

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que le nombre $z_1 = 1 + \frac{2}{3}i$ est une solution de l'équation (E).

0.25 pt **b)** Montrer que la deuxième solution de l'équation (E) est $z_2 = 3z_1$.

0.5 pt **2 -** soit θ un argument du nombre complexe z_1.

Ecrire en fonction θ la forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{5}{3} + 4i$.

partie II :

trois points A, B et Ω différents deux à deux et d'affixes respectifs a, b et ω. Soit r centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$r(A)$ et $B = r(Q)$ et soient p et q les affixes respectifs de P et Q.

ntrer que $p = \omega + e^{\frac{i\pi}{3}}(a - \omega)$ et $q = \quad + e^{\quad}(b - \omega)$.

er qu $\frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{\frac{-i\pi}{3}}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

rer que $\frac{q - a}{q - b} = \left(\frac{\omega - a}{\omega - b}\right) e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

ose que $\left(\frac{\omega - \quad}{\omega - b}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

0.25 pt **a)** Montrer que $APQB$ est un parallélogramme.

0.75 pt **b)** Montrer que $\arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et déduire que le quadrilatère $APQB$ est un rectangle.

sine Elamri
https://stein

Exercice 3 : (3 pts)

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que 503 est un nombre premier.

0.75 pt **b)** Vérifier que : $7^{502} \equiv 1[503]$ puis déduire que $7^{2008} \equiv 1[503]$

2 - On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 49x - 6y = 1$.

0.5 pt Sachant que $(1, 8)$ est une solution particulière de (E), résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ cette équation.

3 - On pose $N = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{2007}$

0.25 pt **a)** Montrer que le couple $(7^{2006}, N)$ est une solution de l'équation (E).

0.25 pt **b)** Déduire que N est divisible par 2012.

1 pt **c)** Montrer que : $N \equiv 0[4]$ et $N \equiv 0[503]$.

$+ x) - \dfrac{x}{1+x}$

e représentative de la

xion de la

$: -1 < \alpha < 0.$

; $\forall n \in \mathbb{N}$

0.5 pt **d)** Sachant que : $g(e) < 0.6$, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Today better than yesterday, tomorrow better than

Exercice 5 : (2.5 pts)

On considère la fonction numérique F définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$

0.25 pt **1 -** Calculer $F(1)$

0.5 pt **2 - a)** Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

0.5 pt **b)** Déduire que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$ $F(x)=0$.

0.5 pt **3 -** En utilisant l'intégration par parties, montrer que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$:

$$F(x)=\left(\arctan x+\arctan\frac{1}{x}\right)\ln x-\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t$$

0.25 pt **4 -** Montrer que $(\forall x>0);\ \arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-\arctan x$

0.5 pt **5 -** Déduire que $(\forall x>0);\ \ln x=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t$

FIN

Yassine Elamri