ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2012

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** ..... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Arithmétique** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** ..... **5.5 points**
- Exercice 5 : **Problème d'analyse** ..... **4.5 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3.5 pts) les parties I et II sont indépendantes

I- Dans l'anneau unitaire $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$, on considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0,75 pt **1 -** Calculer $I - A$ et A^2.

0,5 pt **2 -** En déduire que A admet une matrice inverse que l'on déterminera.

II- Pour tout a et b de l'intervalle $I =]1; +\infty[$, on pose $a * b = \sqrt{a^2b^2 - a^2 - b^2 + 2}$.

0,25 pt **1 -** Vérifier que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$; $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1$.

0.5 pt **2 -** Montrer que $*$ et une lois de composition interne dans I.

3 - On rappelle que $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ est un groupe commutatif.

On considère l'application $\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^{*+} & \to & I \\ & \mapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$

0,5 pt **a)** Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ vers $(I, *)$

0,25 pt **b)** En déduire la structure de $(I, *)$.

0,75 pt **c)** Montrer que l'ensemble $\Gamma = \{\sqrt{1 + 2^m} \,/\, m \in \mathbb{R}\}$ est un sous groupe de $(I, *)$.

Exercice 2 : (3.5 pts) les parties I et II sont indépendantes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

I- Soit a est un nombre complexe non nul, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) : iz^2 + (2 - i)az - (1 + i)a^2 = 0$$

0,75 pt **1 -** Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E).

0,25 pt **2 - a)** Vérifier que : $z_1 z_2 = a^2(i - 1)$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $z_1 z_2$ est un nombre réel $\Longleftrightarrow \arg a \equiv \frac{-3\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2}\right]$.

II- Soient c un nombre réel non nul et z un nombre complexe non nul

On considère les points A, B, C, D et M d'affixes respectives $1,\ 1 + i,\ c,\ ic$ et z.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que A, D et M sont alignés $\Longleftrightarrow (ic+1)z+(ic-1)\bar{z} = 2ic$ (remarquer que $c = \bar{c}$)

0,5 pt **b)** Montrer que : $(AD) \perp (OM) \Longleftrightarrow (ic + 1)z - (ic - 1)\bar{z} = 0$.

2 - Soit h l'affixe du point H, le projeté orthogonal du point O sur (AD).

0,75 pt **a)** Montrer que : $h - (1 + i) = \frac{i}{c}(h - c)$.

0,25 pt **b)** En déduire que $(CH) \perp (BH)$.

Yassine Elamri

Exercice 3 : (3 pts)

1 - On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 143x - 195y = 52$

0,5 pt **a)** Déterminer le plus grand commun diviseur de 143 et 195, puis déduire que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

0,75 pt **b)** Sachant que $(-1; -1)$ est une solution particulière de l'équation (E), résoudre dans $\mathbb{Z}^2$

2

0,5 pt

3

0,5 pt

0,5 pt

4

0,25 pt

n es

On

Soit

0,5 pt **1**

0,5 pt **2**

0,5 pt

0,75 pt **3**

0,75 pt **4**

0,25 pt **5**

1 pt

0,5 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

6 - On considère la fonction numérique g définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = -1 - x\ln x \ ; \ x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

0,25 pt **a)** Montrer que la fonction g est continue à droite au point 0.

0,25 pt **b)** Vérifier que pour $n \geqslant 3$ on a : $g\left(\dfrac{-1}{x_n}\right) = \dfrac{\ln n}{x_n}$.

0,25 pt **c)** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{x_n}$.

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exercice 5 : (4.5 pts)

On considère la fonction numérique F définie sur $[0\,;1]$ par :

$$F(0)=1 \text{ et } F(x)=\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+2x)}{2x^2} \text{ si } x>0$$

0,25 pt **1 -** Soit x un élément de $[0;1]$, montrer que pour tout t de $[0;x]$ on a : $\frac{1}{1+2x}\leqslant\frac{1}{1+2t}\leqslant 1$

2 - Soit x un élément de $]0\,;1]$

0,5 pt **a)** Montrer que $F(x)=\frac{2}{x^2}\int_0^x\frac{t}{1+2t}\mathrm{d}t$.

0,75 pt **b)** Montrer que $\frac{1}{1+2x}\leqslant F(x)\leqslant 1$, et en déduire que F est continue à droite en 0.

0,75 pt **3 -** En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout x de $[0\,;1]$ on a :

$$\int_0^x\frac{2t}{1+2t}\mathrm{d}t=\frac{x^2}{1+2x}+2\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\mathrm{d}t$$

4 - Soit x un élément de $]0\,;1]$

0,5 pt **a)** Montrer que $F'(x)=-\frac{4}{x^3}\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\mathrm{d}t$

0,75 pt **b)** Montrer que $\frac{-4}{3}\leqslant F'(x)\leqslant\frac{-4}{3(1+2x)^2}$ (on pourra utiliser le résultat de la question 1)

0,75 pt **c)** En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction F sur $[0;x]$ montrer que

$$\frac{-4}{3}\leqslant\frac{F(x)-F(0)}{x}\leqslant\frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

0,25 pt **d)** Déduire que la fonction F est dérivable à droite en 0 en précisant son nombre dérivé à droite au point 0.

FIN

Yassine Elamri