ROYAUME DU MAROC

**Baccalauréat Sciences Mathématiques**

**Session : Rattrapage** juin 2013

# MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

## INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

## COMPOSANTES DU SUJET

***Ce sujet comporte 5 exercices :***

- Exercice 1 : **Structures algébriques** ..... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Calcul des probabilités** ..... **3 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** ..... **3.5 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** ..... **8.25 points**
- Exercice 5 : **Problème d'analyse** ..... **1.75 points**

Yassine Elamri

## Exercice 1 : ( 3.5 pts )

les parties A et B sont indépendantes

**partie A :**

Pour tout $x$ et $y$ de l'intervalle $G=]1;2[$ on pose : $x*y=\dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$

0,5 pt **1 -** Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans $G$

**2 -** On rappelle que $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ est un groupe commutatif.

On considère l'application $f$ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $G$ définie par : $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$

0,75 pt **a)** Montrer que $f$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ dans $(G,*)$

0,5 pt **b)** En déduire que $(G,*)$ est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre.

**partie B :**

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et l'unité

$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et que $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel, et on pose : $A=\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

0,5 pt **1 - a)** Vérifier que : $A^3=O$ et en déduire que $A$ est un diviseur de zéro dans l'anneau $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$

0,5 pt **b)** Vérifier que : $(A^2-A+I)(A+I)=I$ en déduire que la matrice $A+I$ admet un inverse dans $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ que l'on déterminera.

**2 -** Pour tout $a$ et $b$ de $\mathbb{R}$ on pose : $M(a,b)=aI+bA$ et l'on considère l'ensemble :

$$E=\left\{M(a,b)\,/\,(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

0,75 pt Montrer que $(E,+,.)$ est un espace vectoriel réel dont on déterminera une base.

## Exercice 2 : (3 pts)

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules noires indiscernables au toucher.

**partie A :**

On tire au hasard successivement et avec remise quatre boules de l'urne, et on considère la variable aléatoire $X$ égale au nombre de boules noires tirées.

1 pt **1 -** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$

0,5 pt **2 -** Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$

**partie B :**

On réalise l'expérience aléatoire suivante en trois étapes :

**Etape 1 :** On tire une boule de l'urne, on marque sa couleur et on la remet dans l'urne.

**Etape 2 :** On ajoute dans l'urne 5 boules de même couleur que la boule tirée à l'étape 1.

**Etape 3 :** On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne qui contient alors 12 boules

Yassine Elamri

après l'étape 2.

On considère les évènements suivants : $N$ ńla boule tirée à l'étape 1 est noireż

$R$ ńla boule tirée à l'étape 1 est rougeż

$E$ ńtoutes les boules tirées à l'étape 3 sont noiresż

**0,5 pt** **1 -** Montrer que : $p(E \cap N) = \dfrac{12}{55}$

**0,5 pt** **2 -** Calculer $p(E)$

**0,5 pt** **3 -** Calculer la probabilité de l'événement $R$ sachant que $E$ est realisé.

## Exercice 3 : (3.5 pts)

**partie A :**

Soit $a$ un nombre complexe différent de 1

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E)\ \ 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$

**0,5 pt** **1 -** Montrer que : $z_1 = \dfrac{(a-1)}{2}(1+\mathrm{i})$ et $z_2 = \dfrac{(a-1)}{2}(1-\mathrm{i})$ sont les deux solutions de l'équation $(E)$

**2 -** On prend : $a = \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

**0,5 pt** **a)** Montrer que : $a - 1 = 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$

**1 pt** **b)** En déduire la forme trigonométrique de $z_1$ et $z_2$

**partie B :**

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$

**On admet que** $Re(a) < 0$, et on considère les points $A(a)$, $B(-\mathrm{i})$, $C(i)$ et $B'(1)$

**0,5 pt** **1 -** Déterminer en fonction de $a$, les affixes des points $J$ et $K$ milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$

**0,5 pt** **2 -** Soit $r_1$ la rotation de centre $J$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, et $r_2$ la rotation de centre $K$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

On pose $C' = r_1(C)$ et $A' = r_2(A)$ et soient $c'$ l'affixe de $C'$ et $a'$ l'affixe de $A'$

Montrer que : $a' = z_1$ et $c' = z_2$

**0,5 pt** **3 -** Calculer $\dfrac{a'-c'}{a-1}$ et en déduire que la droite $(AB')$ est une hauteur du triangle $A'B'C'$

## Exercice 4 : (8.25 pts)

**1 -** Soit $f$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2\ln^2(x)}} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

**0,5 pt** **a)** Montrer que $f$ est continue à droite au point 0, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

**0,5 pt** **b)** Etudier la dérivabilité de $f$ à droite au point 0

(On pourra utiliser le résultat $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln^2(x) = 0$)

**0,5 pt** **c)** Montrer que $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $\left(\forall x > 0\right)\ ;\ f'(x) = \dfrac{-x\ln(x)\left(1+\ln(x)\right)}{\left(1 + x^2\ln^2(x)\right)^{\frac{3}{2}}}$



Today better than yesterday, tomorr https://steinmath.com than today
Yasine Elamri

**0,5 pt** **d)** Donner le tableau de variation de la fonction $f$

**2 -** Soit $F$ la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$
et soit $(C_F)$ la courbe représentative de $F$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

**0,25 pt** **a)** Déterminer une primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur l'

**0,5 pt** **b)** Montrer que : $\left(\forall t\geq e\right)$ ; $t\ln(t)\leq\sqrt{1+t^2\ln^2(t)}\leq\sqrt{2}t\ln$

**0,75 pt** **c)** Montrer que : $\left(\forall x\geq e\right)$ ; $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\ln(x)\right)\leq\int_e^x\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2\ln^2}}$

**0,5 pt** **d)** En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=0$

**0,5 pt** **e)** Montrer que $(C_F)$ admet deux points d'inflexions dont on d

**1 pt** **f)** Construire $(C_F)$ (on prend $F(1)\approx0,5$ et $F\left(\dfrac{1}{e}\right)\approx0,4$)

**3 -** Pour tout $x$ de $[0;+\infty[$ on pose $\varphi(x)=x-F(x)$

**0,75 pt** **a)** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$ et étudier les variations de

**0,5 pt** **b)** Montrer que pour tout entier naturel $n$, l'équation $\varphi(x)=n$
dans l'intervalle $[0;+\infty[$

**0,5 pt** **c)** Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$ ; $\alpha_n\geq n$ puis calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

**0,5 pt** **4 - a)** Montrer que : $\left(\forall n\geq1\right)$ ; $0\leq\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}\leq\dfrac{F(n)}{n}+f(n)$
(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis)

**0,5 pt** **b)** Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha_n}{n}$

## Exercice 5 : (1.75 pts)

Pour tout entier naturel non nul $n$ on pose : $u_n=\left(\dfrac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)^{n^2}$ et $v_n=\ln(u_n)$

**0,25 pt** **1 -** Vérifier que : $\left(\forall n\geq1\right)$ ; $v_n=n^2\left(\ln\left(\arctan(n)\right)-\ln\left(\arctan(n+1)\right)\right)$

**0,5 pt** **2 -** En utilisant le théorème des accroissements finies , montrer que :
$\left(\forall n\geq1\right)\left(\exists c\in\,]n;n+1[\right)$ ; $v_n=\dfrac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$

**0,5 pt** **3 -** Montrer que : $\left(\forall n\geq1\right)$ ; $\dfrac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)}<v_n<\dfrac{-n^2}{\left(1+(n+1)^2\right)\arctan(n+1)}$

**0,5 pt** **4 -** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

FIN

Yassine
https://steinmath.com



better than yesterday, tomorrow better than today