ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2015

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de cinq exercices indépendants entre eux répartis suivant les domaines comme suit :

- Exercice 1 : **Nombres complexes** ..... **3 points**
- Exercice 2 : **Arithmétique** ..... **3 points**
- Exercice 3 : **Structures algébriques** ..... **4 points**
- Exercice 4 : **Analyse** **6.5points**
- Exercice 5 : **Analyse** ..... **3.5 points**

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

1 - On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E) : z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$

0,25 pt **a)** Vérifier que $(3 - i\sqrt{3})^2$ est le discriminant de l'équation (E).

0,5 pt **b)** Déterminer a et b les deux solutions de l'équation (E) (sachant que : $b \in \mathbb{R}$)

0.25 pt **c)** Vérifier que : $b = (1 - i\sqrt{3})a$

2 - Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct. Soit A le point d'affixe a et B le point d'affixe b.

a) Déterminer b_1 l'affixe du point B_1 image du point O par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

0,5 pt

0,5 pt **b)** Montrer que B est l'image de B_1 par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{3}$.

0,5 pt **c)** Vérifier que : $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

d) Soit C un point, d'affixe c, appartenant au cercle circonscrit au triangle OAB et différent de O et de A. Déterminer un argument du nombre complexe $\frac{c}{c-a}$.

0,5 pt

Exercice 2 : (3 pts)

Soit x un nombre entier relatif tel que : $x^{1439} \equiv 1436[2015]$

1 - Sachant que : $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$, montrer que 1436 et 2015 sont premiers entre eux.

0,25 pt

2 - Soit d un diviseur commun de x et de 2015

0,5 pt **a)** Montrer que d divise 1436.

0,5 pt **b)** En déduire que x et 2015 sont premiers entre eux.

3 - a) En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que :

0,75 pt $x^{1440} \equiv 1[5]$ et $x^{1440} \equiv 1[13]$ et $x^{1440} \equiv 1[31]$ (remarquer que : $2015 = 5 \times 13 \times 31$).

0,5 pt **b)** Montrer que : $x^{1440} \equiv 1[65]$ et en déduire que : $x^{1440} \equiv 1[2015]$.

0,5 pt **4 -** Montrer que : $x \equiv 1051[2015]$.

Yassine Elamri

Today better than https://steinmath.com tomorrow better than today

Exercice 4 : (3 pts)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire dont l'unité $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif .

Pour tout réel x on pose $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble $E = \{M(x)/x \in \mathbb{R}\}$. E est muni de la loi de composition interne T définie par :

$$\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right) \quad M(x)TM(y) = M(x+y+1)$$

1 - On considère l'application φ de $\mathbb{R}$ vers E définie par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \varphi(x) = M(x-1)$$

0,5 pt **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers (E, T).

0,5 pt **b)** Montrer que (E, T) est un groupe commutatif.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) \quad M(x) \times M(y) = M(x+y+\mathrm{xy})$.

b) En déduire que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ et que la loi " $\times$ " est commutative

0,5 pt dans E.

0,5 pt **c)** Montrer que la loi " $\times$ " est distributive par rapport à la loi " T " dans E.

d) Vérifier que $M(-1)$ est l'élément neutre dans (E, T) et que I est l'élément neutre dans

0,5 pt $(E, \times)$.

0,25 pt **3 - a)** Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) \quad M(x) \times M\left(\dfrac{-x}{1+x}\right) = I$.

0,75 pt **b)** Montrer que $(E, T, \times)$ est un corps commutatif.

Exercice 4 : (6.5pts)

Première partie : Soit la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \ \textit{et}\ f(x) = x\left(1 + \ln^2 x\right) \ \textit{pour}\ (x > 0)$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu .

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la fonction f est continue à droite au point 0.

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu .

0,5 pt **c)** Calculer $f'(x)$ pour tout $x > \mathbf{0}$, en déduire que f est strictement croissante sur $[\mathbf{0}, +\infty[$.

0,25 pt **3 - a)** Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion I d'abscisse e^{-1}.

0,25 pt **b)** Etudier la position relative de la courbe (C_f) et de la droite d'équation $y = x$.

0,5 pt **c)** Tracer la courbe (C_f). (On prend $e^{-1} \approx 0,4$).

Yassine Elamri

Deuxième partie :

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_0 = e^{-1} \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n)$$

0,5 pt **1 -** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); e^{-1} \leq u_n < 1$.

0,5 pt **2 -** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante, en déduire qu'elle est convergente.

3 - On pose : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

0,25 pt **a)** Montrer que $e^{-1} \leq l \leq 1$

0,5 pt **b)** Déterminer la valeur de l.

Troisième partie : Soit la fonction numérique F définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)\text{dt}$

1 - a) Montrer que la fonction $H : x \longmapsto -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$ est une primitive de la fonction $h : x \longmapsto x \ln x$ sur $]0, +\infty[$. 0,25 pt

b) Montrer que :

$$(\forall x > 0); \int_1^x \ln^2(t)dt = \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int_1^x t\ln(t)dt$$

0,5 pt

c) En déduire que :

$$(\forall x > 0) \quad F(x) = -\frac{3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{2}\ln^2(x)$$

0,5 pt

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la fonction F est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice 5 : (3.5 pts)

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$g(0) = \ln 2 \text{ et } g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt \text{ pour } x > 0$$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall x > 0) \quad (\forall t \in [x, 2x]) \quad e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x > 0) \quad e^{-2x}\ln 2 \leq g(x) \leq e^{-x}\ln 2$. .

0,25 pt **c)** En déduire que la fonction g est continue à droite en 0 .

2 - Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, puis calculer $g'(x)$ pour $x > 0$. . 0,75 pt

3 - a) Montrer que : $(\forall t > 0) \quad -1 \leq \frac{e^{-t}-1}{t} \leq -e^{-t}$ (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis). 0,5 pt

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x > 0) \quad -1 \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x} \leq \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$..

0,5 pt **c)** En déduire que la fonction g est dérivable à droite en 0 .

FIN

Yassine Elamri