ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat SCIENCES MATHÉMATIQUE

Session : Rattrapage juillet 2014

MATHÉMATIQUES

Série : **SCIENCES MATHÉMATIQUE**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de six exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

- Exercice 1 : **Probabilité.** ..... **2 points**
- Exercice 2 : **Arithmétique.** ..... **1 points**
- Exercice 3 : **Structures algébriques** ..... **3.75 points**
- Exercice 4 : **Nombres complexes** ..... **3.25 points**
- Exercice 5 : **Analyse** ..... **7.5 points**
- Exercice 6 : **Analyse** ..... **2.5 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z

♠ **ln** désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (2 pts)

Considèrons trois urnes $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{W}$.

L'urne **W** contient **3** boules indiscernables au toucher : **1** Boule noire et **2** boules blanches. chacune des urnes **U** et **V** contient **4** boules indiscernables au toucher : **2** Boule noires et **2** boules blanches.

On considère l'expérience suivante :

On tire au hasard une boule de l'urne **W** : Si elle est blanche, on la met dans l'urne **U**, puis on tire deux boules simultanément de l'urne **U**, Si elle est noire, on la met dans l'urne **V**, puis on tire deux boules

0.25 **1 -** Quelle est la probabilité pour que le tirage des deux boules soit de l'urne $\boldsymbol{U}$?

0.75 **2 -** Calculer la probabilité de tirer deux boules blanches à la fin de l'expérience ?

1 **3 -** Soit $\boldsymbol{X}$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches à la fin de l'expérience. Déterminer la loi de probabilité de la variable **X**.

Exercice 2 : (1 pts)

Soit **n** un nombre entier naturel non nul.

Posons $\boldsymbol{c_n = 2.10^n - 1}$ et $\boldsymbol{b_n = 2.10^n + 1}$

0.5 **1 -** Montrer que $\boldsymbol{b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2}$, puis en déduire que $\boldsymbol{b_n}$ et $\boldsymbol{c_n}$ sont premiers entre eux.

($\mathbf{a \wedge b}$ représente le plus grand diviseur commun de **a** et **b**)

0.5 **2 -** Déterminer un couple $\mathbf{(x_n, y_n)}$ de $\mathbf{Z^2}$ vérifiant : $\mathbf{b_n x_n + c_n y_n = 1}$

Exercice 3 : (3.75 pts)

On pose $\mathbf{J =]-1, 1[}$

Partie I : Soient **a** et **b** deux éléments de l'intervalle **J**, on pose : $\mathbf{a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}}$

$\mathbf{a, b) \in J^2}\big)$; $\mathbf{1 + ab > 0}$, puis en déduire que $*$ est une loi de composition

la loi $*$ est commutative et associative dans **J**.

la loi $*$ admet un élément neutre dans **J** qu'on détermina.

$\mathbf{(J, *)}$ est un groupe commutatif.

l'application **f** définie sur ℝ par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}}$

fonction **f** est une bijection de ℝ vers **J**.

réciproque de l'application (la détermination de g n'est pas demandée)

et $\mathbf{y}$ de **J**, on pose : $\mathbf{x \perp y = f(g(x) \times g(y))}$

Montrer que **f** est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(\mathbf{J^*}, \perp)$ tel que $\mathbf{J^* = J - \{0\}}$.

Ine Elamri
https://st
https://steinmath.com
Today better than yesterday, tomorrow better than t

0.5 **3 -** On rappelle que $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif et on admet que la loi $\perp$ est distributive par rapport à la loi $*$ dans $\mathbf{J}$.

Montrer que $(\mathbf{J}, *, \perp)$ est un corps commutatif.

Exercice 4 : (3.25 pts)

Partie I :

0.5 **1 -** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation : $\mathbf{z^2 + i = 0}$ (a est la solution de l'équation telle que $\mathbf{Re(a) > 0}$)

0.5 **2 - a)** Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\mathbf{1 + a}$.

0.25 **b)** En déduire que $\mathbf{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$.

0.5 **c)** Vérifier que $(1 + a)(1 - a) = 1 + i$, en déduire la forme trigonométrique du nombre complexe $1 - a$.

Partie II : Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $\mathbf{A, B, M}$ et M' d'affixes respectifs $\mathbf{a, -a, z}$ et $\mathbf{z'}$ tels que $\mathbf{zz' + i = 0}$.

0.25 **1 -** Soit $\mathbf{N}$ le point d'affixe $\overline{\mathbf{z}}$, conjugué de $\mathbf{z}$.

Montrer que les droites $\mathbf{(ON)}$ et (OM') sont perpendiculaires.

0.25 **2 - a)** Montrer que : $\mathbf{z' - a = i\frac{z-a}{az}}$.

0.5 **b)** Montrer que si $\mathbf{z \neq -a}$, alors : $\mathbf{z' \neq -a}$ et $\mathbf{\frac{z'-a}{z'+a} = -\frac{z-a}{z+a}}$.

0.5 **3 -** On suppose que les points A, B, M sont non alignés.

Montrer que le point $\mathbf{M'}$ appartient au cercle circonscrit au triangle $\mathbf{ABM}$.

Exercice 5 : (7.5 pts)

Partie I : Soit $\mathbf{f}$ la fonction définie sur l'intervalle $\mathbf{]0, +\infty[}$ par : $\mathbf{f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}}$

$\mathbf{(C_f)}$ est la courbe représentative de $\mathbf{f}$ dans un repère orthonormé $\mathbf{(O; \vec{i}; \vec{j})}$ unité $\mathbf{1\ cm}$.

1 **1 -** Calculer $\mathbf{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)}$ et $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}$, puis interpréter géométriquement les deux résultats obtenus.

0.75 **2 -** Calculer $\mathbf{f'(x)}$, puis en déduire les variations de la fonction $\mathbf{f}$ sur l'intervalle $\mathbf{]0, +\infty[}$.

3 - Pour tout $\mathbf{n \in \mathbb{N}^*}$, on considère la fonction $\mathbf{g_n}$ définie sur $\mathbf{]0, 1[}$ par : $\mathbf{g_n(x) = f(x) - x^n}$

0.25 **a)** Montrer que $\mathbf{g_n}$ est strictement décroissante sur $\mathbf{]0, 1[}$.

0.5 **b)** En déduire que pour tout entier $\mathbf{n \geq 1}$ il existe $\alpha_n \in \mathbf{]0, 1[}$ unique, tel que : $\mathbf{f}(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$.

0.5 **c)** Montrer que pour tout entier $\mathbf{n \geq 1 : g_n}(\alpha_{n+1}) < 0$.

0.75 **d)** Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante, en déduire qu'elle est convergente.

Yassine Elamri

4 - On pose que : $\mathbf{l} = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

0.25 **a)** Vérifier que : $\mathbf{0 < \alpha_1 \leq l \leq 1}$.

0.25 **b)** Vérifier que : $(\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*)\,; \mathbf{h}(\alpha_n) = \mathbf{n}$ avec $\mathbf{h(x)} = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\ln(-\ln x)}{\ln x}$.

0.5 **c)** Montrer que : $\mathbf{l = 1}$.

0.25 **d)** En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n)^n = 0$.

Partie II :

0.25 **1 - a)** Étudier le signe de l'intégrale $\int_x^1 \mathbf{f(t)dt}$ pour tout x de $]0, +\infty[$

0.5 **b)** En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$(\forall x > 0); \int_x^1 f(t)dt = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\ln x$

c) En déduire, en $\mathbf{cm^2}$, l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathbf{C_f})$ et les droites d'équa-
0.25 tions respectives $x = 1, x = e^2$ et $y = 0$

2 - Pour tout entier naturel non nul $\mathbf{n}$, on pose : $\mathbf{U_n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} \mathbf{f}\left(\dfrac{k}{n}\right)$

0.5 **a)** Montrer que pour tout entiers naturels $\mathbf{n}$ et $\mathbf{k}$ tels que : $\mathbf{n \geq 2}$ et $\mathbf{1 \leq k \leq n-1}$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.5 **b)** Montrer que : $(\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*)\,;$ $\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt \leq u_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt$

0.5 **c)** En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{U}_n = 4$

$\infty[$ par : $\mathbf{g(x)} = \int_{\sqrt{x}}^1 \mathbf{e^{-t^2}dt}$.

$\int_1^x e^{-t^2}dt$.

$\infty[$, ona : $\mathbf{g(x)} = -\mathbf{k}(\sqrt{x})$.

ntinue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.

puis en déduire que g est strictement décroissante sur

$< -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

dérivable à d en 0 et nterprétation

IN

Elamri
https://steinmath.com

Today better than yesterday, tomorrow better than to