ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2014

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Arithmétiques** ..... **3 points**
- Exercice 2 : **Structures algébriques** ..... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** ..... **3.5 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** ..... **8 points**
- Exercice 5 : **Problème d'analyse** ..... **2 points**

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = \underbrace{333....31}_{n fois}$ (n fois le chiffre 3)

0,5 pt **1 -** Vérifier que les deux nombres a_1 et a_2 s

0,5 pt **2 -** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $3a_n +$

0,75 pt **3 -** Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$: 10^{30k+2}

0,75 pt **4 -** Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$: $3a_{10k+}$ a_{30k+1}

0,5 pt **5 -** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$;si $n \equiv$ de solutions dans $\mathbb{Z}^2$

Exercice 2 : (3.5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{C}; +; \times)$ est un corps comm de zéro $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et dunité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout a et b de $\mathbb{R}$ on pose : $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a \\ b & a \end{pmatrix}$

0,5 pt **1 -** Montrer que E est un sous-groupe du g

0,75 pt **2 -** Calculer $J^2 = J \times J$ sachant que $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis en déduire que E n'est pas stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

3 - On définit sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne $*$ par :$A * B = A \times N \times B$ avec : $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui associe à chaque nombre complexe non nul $a + ib$ (a et b étant deux nombres réels) la matrice $M(a,b)$

0,5 pt **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), *)$

0,25 pt **b)** On pose :$E^* = E - \{0\}$ Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

0,5 pt **c)** Montrer que $(E^*, *)$ est un groupe commutatif.

0,5 pt **4 -** Montrer que :$((A,B,C) \in E^3)$ $A * (B + C) = A * B + A * C$

0,5 pt **5 -** En déduire de ce qui précède que $(E, +, *)$est un corps commutatif.

Exercice 3 : (3.5 pts)

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ Soit θ un nombre réel tel que : $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] - \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

1 - On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : (E) $z^2 - \sqrt{2}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$

https://steinmath.com
y better than yesterday, tomorrow better than today
Yassi

0,25 pt **a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = \left(\sqrt{2}ie^{i\theta}\right)^2$

0,75 pt **b)** Écrire sous forme trigonométrique les deux racines z_1 et z_2 de l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$.

2 - On considère les points I , J , T_1 , T_2 et A d'affixes respectives 1 , -1 , $e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$, $e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$ et $\sqrt{2}e^{i\theta}$.

0,5 pt **a)** Montrer que les deux droites (OA) et (T_1T_2) sont perpendiculaires.

0,25 pt **b)** Soit K le milieu du segment $[T_1T_2]$.Montrer que les points O , K et A sont alignés.

0,25 pt **c)** En déduire que la droite (OA) est la médiatrice du segment $[T_1T_2]$

3 - Soit r la rotation de centre T_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

0,25 pt **a)** Donner l'expression complexe de la rotation r

0,5 pt **b)** Vérifier que l'affixe du point B image du point I par la rotation r est : $b = \sqrt{2}e^{i\theta} + i$

0,25 pt **c)** Montrer que les deux droites (AB) et (IJ) sont perpendiculaires.

0,25 pt **4 -** Déterminer l'affixe du point C image du point A par la translation de vecteur $(-\vec{v})$.

0,25 pt **5 -** Montrer que A est le milieu du segment $[BC]$

Exercice 4 : (8 pts)

I)- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x\ln x}{1+x^2} & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$

0,25 pt **b)** Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0;+\infty[$

0,25 pt **2 - a)** Montrer que :$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

0,25 pt **b)** Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$

0,5 pt **c)** Montrer que : $(\exists \alpha \in]0,1[)$ $f'(\alpha) = 0$

0,5 pt **d)** En déduire que : $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$

II) - On considère la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

0,5 pt **1 - a)** Vérifier que : $(\forall t \in [1,+\infty[)$ $\frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$

1 pt **b)** Montrer que : $(\forall t \in [1,+\infty[)$ $F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$

(On remarquera que :$F(x) = \int_0^1 f(t)dt - \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}\frac{\ln t}{t}dt$)

1 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x}$ puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que F est dérivable sur $[0;+\infty[$ puis calculer $F'(x)$

0,25 pt **b)** Étudier les variations de F sur $[0;+\infty[$

Yassine Elamri

III)-

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall t \in]0,+\infty[)\ -t\ln t \leq \frac{1}{e}$

0,25 pt **b)** Montrer que :$(\forall t \in [0,+\infty[)\ f(t) \leq \frac{1}{e}$

0,25 pt **c)** En déduire que : $(\forall x \in]0,+\infty[)\ F(x) < x$

2 - On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 \in]0;1[$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ :\ u_{n+1} = F(u_n)$

0,5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ :\ u_n \in]0,1[$

0,5 pt **b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

0,5 pt **c)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 5 : (2 pts)

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} & ;x>0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

0,5 pt **1 -** Montrer que g est continue sur $[0;+\infty[$.

2 - Pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$; on pose : $L(x) = \int_0^x g(t)dt$

025 pt **a)** Montrer que L est continue sur $[0;+\infty[$

025 pt **b)** Calculer $L(x)$ pour $x > 0$

0,5 pt **c)** Calculer $\lim\ L(x)$ et en déduire la valeur de $L(0)$

1 , on pose :$S_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$

vergente puis déterminer sa limite.

Elami

https:/

IN

https://steinmath.com

Today better than yesterday, tomorrow better than to