ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat SCIENCES MATHÉMATIQUE

Session : Rattrapage juillet 2015

MATHÉMATIQUES

Série : **SCIENCES MATHÉMATIQUE**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de cinq exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** ..... **4 points**
- Exercice 2 : **Arithmétique et Probabilités** ..... **3 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **Analyse** ..... **6 points**
- Exercice 5 : **Analyse** ..... **4 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ **ln** désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (4 pts)

Partie I : On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne * définie par : $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$; $x^*y = x + y - e^{xy} + 1$

0.25 **1 - a)** Montrer que la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$.

0.5 **b)** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre qu'on déterminera.

2 - Sachant que l'équation : (E) : $3 + x - e^{2x} = 0$ admet deux solutions distincts a et b

0.5 dans $\mathbb{R}$, Montrer que la loi $*$ n'est pas associative.

Partie II : On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $F = \left\{M(x,y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

$_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

$\mathbb{R}^2\right)$; $\varphi(x+iy) = M(x,y)$

$(\mathbb{F}, \times)$

$= F^*$

$1[$

lution de (E).

$= \{7 + 13k / k \in \mathbb{Z}$

otées de 1 à 50 er-

de tirer une boule portant

0.5 un nombre solution de l'équation (E).

https://steinmath.
Today better than yesterday, tomorrow better than toda

0.5 **2 -** On tire au hasard une boule de l'urne, on note son numéro et on la remet dans l'urne. On répète cette expérience trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule portant un nombre solution de l'équation $(\boldsymbol{E})$?

Exercice 3 : (3 pts)

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $\mathbf{(E) : z^2-(1+i)z+2+2i=0}$

0.25 **1 - a)** Vérifier que $\boldsymbol{\Delta = (1-3i)^2}$ est le discriminant de l'équation $(\boldsymbol{E})$

0.5 **b)** Déterminer $\mathbf{z_1}$ et $\mathbf{z_2}$ les solutions de l'équation $(\boldsymbol{E})$ dans $\mathbb{C}$ (on prendra $\mathbf{z_1}$ l'imaginaire pur)

0.5 **c)** Montrer que $\dfrac{\boldsymbol{z_1}}{\boldsymbol{z_2}} = \boldsymbol{\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}}$.

2 - Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\mathbf{(O,\vec{u},\vec{v})}$

On considère les points **A** et **B** d'affixes respectifs $\mathbf{z_1}$ et $\mathbf{z_2}$.

0.25 **a)** Déterminer le nombre complexe $\boldsymbol{e}$ l'affixe du point **E**, milieu du segment **[AB]**.

b) Soit **R** la rotation de centre **A** d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, et $\boldsymbol{c}$ l'affixe de point $\boldsymbol{C}$ tel que $\mathbf{R(E)=C}$.

0.5 Montrer que : $\mathbf{z_C = -\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i}$.

1 **c)** Soit **D** le point d'affixe $\mathbf{d = 1+\dfrac{3}{2}i}$. Montrer que le nombre $\left(\dfrac{\mathbf{z_2-d}}{\mathbf{c-d}}\right)\times\left(\dfrac{\mathbf{c-z_1}}{\mathbf{z_2-z_1}}\right)$ est réel , puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

Exercice 4 : (6 pts)

$\boldsymbol{n}$ est un entier naturel non nul.

On considère la fonction $\boldsymbol{f_n}$ définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{f_n(x)=\dfrac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}}$

$(\boldsymbol{C_n})$ est la courbe représentative de $\boldsymbol{f_n}$ dans un repère orthonormé $(\boldsymbol{O;\vec{i};\vec{j}})$.

0.75 **1 - a)** Calculer $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)}$ et $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)}$ puis interpréter graphiquement les deux résultats obtenus.

0.75 **b)** Montrer que la fonction $\boldsymbol{f_n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $\boldsymbol{f_n'(x)}$ pour tout $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}$.

0.25 **c)** Montrer que la fonction $\boldsymbol{f_n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

0.5 **2 - a)** Montrer que le point $\boldsymbol{I_n\left(n,\dfrac{1}{2}\right)}$ est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathbb{C}_n)$.

0.5 **b)** Construire la courbe $\boldsymbol{(C_1)}$,

c) Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe $\boldsymbol{(C_1)}$ et les droites d'équations respectives : $\boldsymbol{x=0}$, $\boldsymbol{x=1}$ et $\boldsymbol{y=0}$.

0.75

3 - a) Montrer que pour tout $\boldsymbol{n\in\mathbb{N}^*}$, l'équation $\boldsymbol{f_n(x)=x}$ admet une solution unique $\boldsymbol{u_n\in]0,n[}$.

0.75

0.5 **b)** Montrer que : $\boldsymbol{(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,(\forall x\in\mathbb{R});\, f_{n+1}(x)<f_n(x)}$

c) Montrer que la suite $\boldsymbol{(u_n)_{n\geq1}}$ est strictement décroissante, en déduire qu'elle est convergente .

0.75

Yassine Elamri

0.5 **d)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 5 : (4 pts)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$ et $g(0) = 1$

0.5 **1 -** Montrer que la fonction g est paire.

0.75 **2 -** Montrer que la fonction $g$est dérivable sur $]0, +\infty[$. puis calculer $g'(x)$ pour $x > 0$

0.5 **3 - a)** En utilisant une intégration par parties, montrer que ; pour tout $x > 0$:

$$\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

0.75 **b)** Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, On a : $|g(x)| \leq \frac{2}{x}$ puis déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

0.5 **4 - a)** Montrer que : $(\forall x > 0); 0 \leq \int_x^{3x} \frac{1 - \cos t}{t} dt \leq 2x$

(Remarquer que : $(\forall t > 0)\,; 1 - \cos t \leq t$)

0.5 **b)** Vérifier que $(\forall x > 0); g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$

0.5 **c)** En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

FIN

Yassine Elamri