ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2015

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de cinq exercices indépendants entre eux répartis suivant les domaines comme suit :

— Exercice 1 : **Nombres complexes** ..... **3 points**
— Exercice 2 : **Arithmétique** ..... **3 points**
— Exercice 3 : **Structures algébriques** ..... **4 points**
— Exercice 4 : **Analyse** ..... **6.5 points**
— Exercice 5 : **Analyse** ..... **3.5 points**

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

1 - On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) : z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$$

0,25 pt **a)** Vérifier que $(3 - i\sqrt{3})^2$ est le discriminant de l'équation (E).

0,5 pt **b)** Déterminer a et b les deux solutions de l'équation (E) (sachant que : $b \in \mathbb{R}$)

0.25 pt **c)** Vérifier que : $b = (1 - i\sqrt{3})a$

2 - Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. Soit A le point d'affixe a et B le point d'affixe b.

0,5 pt **a)** Déterminer le nombre complexe b_1 l'affixe du point B_1 image du point O par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

0,5 pt **b)** Montrer que B est l'image de B_1 par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{3}$.

0,5 pt **c)** Vérifier que : $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

0,5 pt **d)** Soit C un point . d'affixe c, appartenant au cercle circonscrit au triangle OAB et différent de O et de A.
Déterminer un argument du nombre complexe $\frac{c}{c-a}$

Exercice 2 : (3 pts)

Soit x un nombre entier relatif tel que : $x^{1439} \equiv 1436[2015]$

0,25 pt **1 -** Sachant que : $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$, montrer que 1436 et 2015 sont premiers entre eux.

2 - Soit d un diviseur commun de x et de 2015

0,5 pt **a)** Montrer que d divise 1436.

0,5 pt **b)** Déduire que x et 2015 sont premiers entre eux.

0,75 pt **3 - a)** En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que :
$x^{1440} \equiv 1[5]$ et $x^{1440} \equiv 1[13]$ et $x^{1440} \equiv 1[31]$ (remarquer que : $2015 = 5 \times 13 \times 31$).

0,5 pt **b)** Montrer que : $x^{1440} \equiv 1[65]$ puis déduire que : $x^{1440} \equiv 1[2015]$.

0,5 pt **4 -** Montrer que : $x \equiv 1051[2015]$.

Exercice 3 : (4pts)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire dont l'unité $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif .

Pour tout réel x on pose $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$
et on considère l'ensemble $E = \{M(x)/x \in \mathbb{R}\}$. E est muni de la loi de composition interne T définie par : $\left(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\right) \quad M(x)TM(y) = M(x + y + 1)$

Yassine Elamri

1 - On considère l'application φ de $\mathbb{R}$ vers E définie par : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \varphi(x) = M(x-1)$

0,5 pt **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers (E, T).

0,5 pt **b)** Montrer que (E, T) est un groupe commutatif.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right) \quad M(x) \times M(y) = M(x+y+\mathrm{xy})$.

0,5 pt **b)** En déduire que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ et que la loi " $\times$ " est commutative dans E.

0,5 pt **c)** Montrer que la loi " $\times$ " est distributive par rapport à la loi " T " dans E.

0,5 pt **d)** Vérifier que $M(-1)$ est l'élément neutre dans (E, T) et que I est l'élément neutre dans $(E, \times)$.

0,25 pt **3 - a)** Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) \quad M(x) \times M\left(\dfrac{-x}{1+x}\right) = I$.

0,75 pt **b)** Montrer que $(E, T, \times)$ est un corps commutatif.

Exercice 4 : (6.5pts)

Partie I : Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \ et \quad \forall x > 0 \quad f(x) = x\left(1 + \ln^2 x\right)$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu .

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la fonction f est continue à droite au point 0.

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu .

0,5 pt **c)** Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$, en déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

0,25 pt **3 - a)** Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion I d'abscisse e^{-1}.

0,25 pt **b)** Étudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite d'équation $y = x$.

0,5 pt **c)** Tracer la courbe (C_f). (On prend $e^{-1} \approx 0,4$).

Partie II :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $u_0 = e^{-1}$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} = f(u_n)$

0,5 pt **1 -** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ e^{-1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

0,5 pt **2 -** Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est strictement croissante, puis déduire qu'elle est convergente.

3 - On pose : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

0,25 pt **a)** Montrer que $e^{-1} \leqslant l \leqslant 1$

0,5 pt **b)** Déterminer la valeur de l.

Partie III : Soit la fonction numérique F définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{dt}$$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que la fonction $H : x \mapsto -\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x^2 \ln x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto x \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

Yassine Elamri

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x > 0)\ ;\ \int_1^x t\ln^2(t)dt = \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int_1^x t\ln(t)dt$

0,5 pt **c)** En déduire que : $(\forall x > 0)\quad F(x) = -\frac{3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{2}\ln^2(x)$

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la fonction F est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ puis déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice 5 : (3.5 pts)

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$g(0) = \ln 2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt \ \text{ pour } \ x > 0$$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall x > 0)\quad (\forall t \in [x, 2x])\quad e^{-2x} \leqslant e^{-t} \leqslant e^{-x}$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x > 0)\quad e^{-2x}\ln 2 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x}\ln 2$. .

0,25 pt **c)** En déduire que la fonction g est continue à droite en 0 .

0,75 pt **2 -** Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, puis calculer $g'(x)$ pour $x > 0$. .

0,5 pt **3 - a)** Montrer que s : $(\forall t > 0)\quad -1 \leqslant \frac{e^{-t} - 1}{t} \leqslant e^{-t}$ (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis).

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x > 0)\quad -1 \leqslant \frac{g(x) - \ln 2}{x} \leqslant \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$..

0,5 pt **c)** En déduire que la fonction g est dérivable à droite en 0 .

Yassine Elamri

FIN