ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Rattrapage juin 2016

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Calcul des probabilités** ..... **3 points**
- Exercice 2 : **Structures algébriques** ..... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** ..... **3.5 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** ..... **6.5 points**
- Exercice 5 : **Problème d'analyse** ..... **3.5 points**

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

On a deux boites U et V. La boite U contient 4 boules rouges et 4 boules bleues. La boite V contient deux boules rouges 4 boules bleues.

On considère l'épreuve suivante : On tire au hasard une boule de la boite U : Si elle est rouge, on la remet dans la boite V puis on tire au hasard une boule de la boite V, si elle est bleue on la pose de coté puis on tire une boule de la boite V.

Soient les événements suivants : R_U « La boule tirée de la boite U est rouge »

B_U « La boule tirée de la boite U est bleue »

R_V « La boule tirée de la boite V est rouge »

B_V « La boule tirée de la boite V est bleue »

0,5 pt **1 -** Calculer la probabilité de chacun des deux événements R_U et B_U.

0,5 pt **2 - a)** Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que l'événement R_U est réalisé.

0,5 pt **b)** Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que l'événement B_U est réalisé.

1 pt **3 -** Montrer que la probabilité de l'événement B_V est : $\frac{13}{21}$

0.5 pt **4 -** En déduire la probabilité de l'événement R_V.

Exercice 2 : (3.5 pts)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Pour chaque nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose : $M(z) = \begin{pmatrix} x+2y & 0 & 5y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & x-2y \end{pmatrix}$

et on considère l'ensemble $E = \{M(z) \,/\, z \in \mathbb{C}\}$

1 - On munit E de la loi de composition interne * définie par :

$(\forall z \in \mathbb{C})\ (\forall z' \in \mathbb{C}) \quad : \quad M(z)^* M(z') = M(z) + M(z') - M(0)$

1 pt Montrer que $(E, ^*)$ est un groupe commuatif.

2 - On considère l'application $\varphi : \mathbb{C}^* \mapsto E$ qui associe au nombre complexe z de $\mathbb{C}^*$ la matrice $M(z)$ de E

1 pt **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(C^*, \times)$ dans $(E, \times)$

0,5 pt **b)** En déduire que $(E - \{M(0)\}, \times)$ est un groupe commutatif.

1 pt **3 -** Montrer que $(E, ^*, \times)$ est un corps commutatif.

Exercice 3 : (3.5 pts)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) \ : \ z^2 - \left(1 + \sqrt{3}\right)(1 + \mathrm{i})\, z + 4\mathrm{i} = 0$

0,5 pt **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = \left[\left(\sqrt{3} - 1\right)(1 - \mathrm{i})\right]^2$

Today b an yesterday, tomorrow better than today

Yassine Elamri

1 pt **b)** Ecrire sous forme trigonométrique les deux solutions de (E)

2 - Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère les deux points A et B d'affixes respectives $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{3} + i$

a) Montrer que l'ensemble (D) des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $z = \frac{1}{2}a\bar{z}$ est une droite qui passe par le point B **0,75 pt**

b) Soient M et M' deux points d'affixes respectives z et z' tels que : $z' = a\bar{z} - b$ et $z \neq b$

Montrer que : $\dfrac{b^2}{(z'-b)(z-b)} = \dfrac{2}{|z-b|^2}$ **0,5 pt**

c) En déduire que la droite (D) est une bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}\right)$ **0,75 pt**

Exercice 4 : (6.5 pts)

n est un entier naturel non nul.

Soit f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f_n(x) = \ln(x) - \dfrac{n}{x}$

et soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1 - a) Etudier les deux branches infinies de la courbe (C_n). **0,75 pt**

b) Etudier les variations de la fonction f_n sur $]0;+\infty[$ puis donner son tableau de variation. **0,75 pt**

c) Construire (C_2) **0,5 pt**

2 - Montrer que la fonction f_n est une bijection de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ **0,5 pt**

3 - a) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, il existe un unique nombre réel α_n de l'intervalle $]0;+\infty[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$ **0,5 pt**

b) Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$ **0,5 pt**

c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante. **0,5 pt**

4 - a) Montrer que : $(\forall x > 0)$; $\ln(x) < x$ **0,5 pt**

b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$ **0,5 pt**

5 - Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 on pose : $I_n = \dfrac{1}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} \displaystyle\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x)\mathrm{d}x$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\exists c_n \in [\alpha_n; \alpha_{n+1}])$: $I_n = f_n(c_n)$ **0,5 pt**

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$ **0,5 pt**

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ **0,5 pt**

Exercice 5 : (3.5 pts)

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction numérique g_n à variable réelle x définie sur l'intervalle $[n;+\infty[$ par :

$$g_n(x) = \int_n^x \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$$

1 - a) Montrer que la fonction g_n est dérivable sur l'intervalle $[n;+\infty[$ puis déterminer sa fonction dérivée première g_n' **0,5 pt**

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Yassine Elamri

0,25 pt **b)** Montrer que la fonction g_n est strictement croissante sur l'intervalle $[n;+\infty[$.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x \geq n) \quad ; \quad g_n(x) \geq \ln\left(\dfrac{x-1}{n-1}\right)$

(On pourra utiliser l'inégalité :$(\forall t \geq 0) \quad ; \quad \ln(1+t) \leq t$)

0,25 pt **b)** En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$

0,25 pt **3 - a)** Montrer que g_n est une bijection de l'intervalle $[n;+\infty[$ dans l'intervalle $[0;+\infty[$.

0,5 pt **b)** En déduire que : $(\forall n \geq 2) \quad (\exists!\ u_n \geq n) \quad : \quad \displaystyle\int_n^{u_n} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t = 1$

4 - On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 2}$ définie dans la question 3-b).

0,5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \geq 2) \quad ; \quad \displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$

0,5 pt **b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

0,25 pt **c)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

FIN

Yassine Elamri