ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2016

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** ..... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Arithmétiques** ..... **3 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** ..... **3.5 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** ..... **7 points**
- Exercice 5 : **Problème d'analyse** ..... **3 points**

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exercice 1 : (3.5 pts)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$ on pose : $M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&0&-2y\\0&0&0\\y&0&x-y\end{pmatrix}$ et $E=\left\{M(x,y)\,;\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

0,5 pt **1 -** Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_3(\mathbb{R}),+)$

0,5 pt **2 -** Vérifier : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\ \left(\forall(x',y')\in\mathbb{R}^2\right) : M(x,y)\times M(x',y')=M\left(xx'-yy',xy'+yx'\right)$

3 - On pose : $E^*=E-\left\{M(0,0)\right\}$ et on considère l'application $\varphi:\mathbb{C}^*\mapsto E$ qui au nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$ associe la matrice $M(x,y)$ de E, avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

0,25 pt **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(C^*,\times)$ vers $(E,\times)$

0,75 pt **b)** En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $M(1,0)$

0,5 pt **4 -** Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

5 - On pose : $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

0,5 pt **a)** Calculer $A\times M(x,y)$ pour $M(x,y)\in E$

0,5 pt **b)** En déduire qu'aucun élément de E n'admet pas de symétrique dans $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

Exercice 2 : (3 pts)

partie A :

Soit (a,b) dans $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ tel que le nombre **premier** 173 divise a^3+b^3

0,25 pt **1 -** Montrer que $a^{171}\equiv -b^{171}\ [173]$ (remarquer que : $171=3\times57$)

0,25 pt **2 -** Montrer que : 173 **divise** a si et seulement si 173 **divise** b

0,25 pt **3 -** On suppose que 173 **divise** a. Montrer que 173 **divise** $a+b$

4 - On suppose que 173 **ne divise pas** a

0,5 pt **a)** En utilisant le théorème de **FERMAT**, montrer que : $a^{172}\equiv b^{172}\ [173]$

0,5 pt **b)** Montrer que : $a^{171}(a+b)\equiv 0\ [173]$

0,5 pt **c)** En déduire que 173 **divise** $a+b$

partie B :

On considère dans $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ l'équation suivante : $(E)\ x^3+y^3=173(xy+1)$

Soit (x,y) un élément de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ solution de (E), on pose $x+y=173k$ avec $k\in\mathbb{N}^*$

0,25 pt **1 -** Vérifier que : $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$

0,5 pt **2 -** Montrer que : $k=1$, puis résoudre l'équation (E).

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exercice 3 : (3.5 pts)

le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère dans le plan complexe deux points M_1 et M_2 tels que les points O, M_1 et M_2 sont distincts deux à deux et non alignés.

Soient z_1 et z_2 les affixes respectives des points M_1 et M_2 et soit M le point dont l'affixe z vérifie la relation : $z = \dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $\dfrac{z_1-z}{z_2-z} \times \dfrac{z_2}{z_1} = -1$

0,5 pt **b)** En déduire que le point M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2

0,5 pt **2 -** Montrer que si $z_2 = \overline{z_1}$ alors M appartient à l'axe des réels.

3 - On suppose que M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et de mesure d'angle α où α est un réel de l'intervalle $]0;\pi[$

0,5 pt **a)** Calculer z_2 en fonction de z_1 et de α

0,5 pt **b)** Montrer que le point M appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$

4 - Soit θ un réel donné de lintervalle $]0;\pi[$

On suppose que z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation : $6t^2 - (e^{i\theta}+1)t + (e^{i\theta}-1) = 0$

0,5 pt **a)** Sans calculer z_1 et z_2 vérifier que : $z = 2\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$

0,5 pt **b)** Donner en fonction de θ, la forme trigonométrique du nombre complexe z.

Exercice 4 : (7 pts)

partie A :

0,5 pt **1 -** En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto e^{-t}$, montrer que pour tout réel strictement positif x, il existe un réel θ compris entre 0 et x tel que : $e^{\theta} = \dfrac{x}{1-e^{-x}}$

2 - En déduire que :

0,25 pt **a)** $\left(\forall x > 0\right)$; $1 - x < e^{-x}$

0,25 pt **b)** $\left(\forall x > 0\right)$; $x + 1 < e^{x}$

0,25 pt **c)** $\left(\forall x > 0\right)$; $0 < \ln\left(\dfrac{xe^x}{e^x-1}\right) < x$

partie B :

On considère la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x-1}$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$

Et soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

0,5 pt **b)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que : $\left(\forall x \geq 0\right)$; $x - \dfrac{x^2}{2} \leq -e^{-x} + 1$

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-a) de la première partie)

Today better than yest https://steinmath.com orrow better than today

0,5 pt **b)** En déduire que : $\left(\forall x \geq 0\right)\ ;\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} \leq \mathrm{e}^{-x} + x - 1 \leq \dfrac{x^2}{2}$

0,5 pt **3 - a)** Vérifier que : $\left(\forall x > 0\right)\ ;\ \dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}+x-1}{x^2} f(x)$

0,75 pt **b)** En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{1}{2}$ puis interpréter le résultat obtenu.

0,75 pt **4 - a)** Montrer que f est dérivable en tout point de $]0;+\infty[$ et que :

$$\left(\forall x > 0\right)\ ;\ f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1 - x)}{\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^2}$$

0,5 pt **b)** En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-b) de la première partie)

partie C :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln\left(f(u_n)\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$

0,5 pt **1 -** Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n > 0$

0,5 pt **2 -** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-c) de la première partie)

0,5 pt **3 -** Montrer que 0 est l'unique solution de l'équation : $\ln\left(f(u_n)\right) = x$ puis déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

Exercice 5 : (3 pts)

On considère la fonction numérique F définie sur l'intervalle $I =]0;+\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_{\ln(2)}^{x} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t - 1}}\mathrm{d}t$

0,5 pt **1 - a)** Etudier le signe de $F(x)$ pour tout x de I

0,5 pt **b)** Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle I et calculer $F'(x)$ pour tout x de I.

0,25 pt **c)** Montrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle I

0,5 pt **2 - a)** En utilisant la technique de changement de variable en posant : $u = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}$, montrer que pour tout x de I on a : $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{x} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t - 1}}\mathrm{d}t = 2\arctan\left(\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\right) - \frac{\pi}{2}$

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x)$

0,25 pt **3 - a)** Montrer que la fonction F est une bijection de l'intervalle I dans un intervalle J que l'on déterminera.

0,5 pt **b)** Déterminer F^{-1} la bijection réciproque de F.

FIN

Today better than yesterday, tomorrow better than https://steinma