ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : de Rattrappage juillet 2017

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** ..... **4.5 points**
- Exercice 2 : **Calcul des probabilités** ..... **3 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** ..... **2.5 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** ..... **10 points**

Yassine Elamri

Exercice 1 : (4.5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif, que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un espace vectoriel réel et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire, non commutatif et non intègre .

On pose : $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $M(x,y)=\begin{pmatrix}x & -3y\\ y & x\end{pmatrix}$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

0.75 pt **1 -** Montrer que E est un sous espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ de dimension 2.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que E est stable dans $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$.

0.75 pt **b)** Montrer que : $(E,+,\times)$ est un anneau unitaire et commutatif.

3 - On pose $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$ et on considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E^* définie par : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad \varphi(x+iy)=M\left(x,\frac{y}{\sqrt{3}}\right)$

0.75 pt **a)** Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$.

0.5 pt **b)** En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.

0.75 pt **c)** Montrer que $J^{2017}=\varphi\left(3^{1008}\,\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$, puis déterminer l'inverse de la matrice J^{2017} dans $(E^*,\times)$.

0.5 pt **4 -** Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice 2 : (3 pts)

Un sac contient $2n$ boules ($n\in\mathbb{N}^*$), dont n sont blanches et n sont noires.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Un jeu consiste à tirer une boule du sac à noter sa couleur et à la remettre dans le sac, puis à tirer du même sac une nouvelle boulle et à noter aussi sa couleur.

La règle du jeu indique que :

- Si les deux boules tirées sont blanches, on gagne 20 points.
- Si les deux boules tirées sont noires,on perd 20 points.
- Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, le gain est nul.

0.75 pt **1 -** Calculer la probabilité de gagner 20 points, la probabilité de perdre 20 points et la probabilité de réaliser un gain nul.

2 - On répète 5 fois le jeu précédent.

0.5 pt **a)** Calculer la probabilité de gagner 100 points.

1 pt **b)** Calculer la probabilité de gagner 40 points.

3 - Au cours d'un jeu , on considère la variable X qui prend uniquement les valeurs -20 si on perd, 0 si le gain est nul et $+20$ si on gagne.

0.5 pt **a)** déterminer la loi de probabilité de la variable X.

0.25 pt **b)** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Tod https://stelmath.com than yesterday, tomorrow better than today

Yassine Elamri

Exercice 3 : (2.5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Soient M le point d'affixe le nombre complexe non nul z et M' le point d'affixe $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

0.5 pt **1 -** Déterminer le nombre complexe z pour que les deux points M et M' soient confondus.

2 - On suppose que M est distinct des points A et B d'affixes respectifs 1 et -1.

0.5 pt Montrer que : $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

3 - Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$.

0.75 pt Montrer que : si M appartient à (Δ) alors M' appartient à (Δ).

4 - Soit (Γ) le cercle dont un diamètre est $[AB]$.

0.75 pt Montrer que si M appartient à (Γ) alors M' appartient à la droite (AB)

Exercice 4 : (10 pts)

Partie A :

Soit f la fonction numérique définie sur $I = [0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\arctan(x)}{x} & ; x \in]0; +\infty[\\ f(0) = 1 \end{cases}$

0.5 pt **1 -** Montrer que f est continue sur l'intervalle I.

0.5 pt **2 - a)** Soit x dans I. Montrer que $\forall t \in [0; x]$; $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x \in I)$; $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x$.

0.75 pt **c)** Montrer que f est dérivable à droite en 0.

0.5 pt **3 - a)** Sachant que f est dérivable sur $]0; +\infty[$, Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

0.25 pt **b)** Étudier les variations de f sur I.

Partie B :

rique définie sur $I = [0; +\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t; & x \in]0; +\infty[\\ g(0) = 1 \end{cases}$

: $(\forall x \in]0; +\infty[)$; $f(x) \leq g(x) \leq 1$.

g est dérivable à droite en 0.

st dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et que :

$\forall$ $]0;$ $\infty[$; $g'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - g(x))$

décroissa sur l'interva I.

$\lim$ $\int$ $(t)\mathrm{d}t$ 0

0.75 pt (Remarque : $\forall x \in]0; +\infty[$; $0 < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$)

0.5 pt **b)** Calculer : $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

Partie C :

https://steinmath.com
Today better than yesterday, tomorrow better than t
ine Elamri
https://st

0.75 pt **1 -** Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α dans $]0;1[$.

0.5 pt **2 - a)** Vérifier que : $\forall x \in]0;+\infty[\,; \quad 0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{1+x^2}$

(on pourra utiliser la question 2-b) partie A)

0.75 pt **b)** Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[\,; \quad \left|g'(x)\right| \leq \frac{1}{2}$

3 - Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^+ \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$; pour tout n dans $\mathbb{N}$

0.75 pt **a)** Montrer que :$(\forall n \in \mathbb{N})\,; \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$.

0.75 pt **b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

FIN

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than