ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2017

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** ..... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Arithmétiques** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** ..... **10 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3.5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle $\mathrm{O}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et dont l'unité est la matrice identique $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. on pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ et pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{M(a,b)}=\begin{pmatrix}a&b&-b\\0&0&0\\b&-a&a\end{pmatrix}$

On considère l'ensemble : $E=\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.

0,5 pt **1 -** Montrer que E est un sous groupe de $(M_3(\mathbb{R}),+)$

2 - On définit sur $M_3(\mathbb{R})$ la loi de composition interne T par :
$(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2)\ (\forall(c,d)\in\mathbb{R}^2)\,;\,(M(a,b)TM(c,d)=M(a,b)\times A\times M(c,d)$
0,5 pt Montrer que E est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}),T)$

3 - On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E définie par :
$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\,;\,\varphi(x+iy)=M(x,y)$ et on pose $E^*=E-\{M(0,0)\}$

0,75 pt **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers (E,T) et que $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$.

b) On déduire que (E^*,T) est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre
0,75 pt J.

0,5 pt **4 -** Montrer que la loi T est distributive par rapport a la loi $+$ dans E.

0,5 pt **5 -** On déduire que $(E,+,T)$ est un corps commutatif .

Exercice 2 : (3.5 pts)

Soit m un complexe non nul.

Première partie :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z, (E_m) : $2z^2-2(m+1+i)z+m^2+(1+i)m+i=0$

0,5 pt **1 -** Vérifier que le discriminant l'équation de (E_m) est : $\Delta=(2im)^2$.

0,5 pt **2 -** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m).

Deuxième partie :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé directe $\left(\mathrm{O},\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$On suppose que $m\in\mathbb{C}-\{0,1,i\}$ et on pose : $z_1=\dfrac{1+i}{2}(m+1)$ et $z_2=\dfrac{1-i}{2}(m+i)$

On considère les points : A , B , M , M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, i, m, Z_1 et Z_2

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que : $z_1=iz_2+1$

b) Montrer que M_1 est l'image de M_2 par la rotation de centre Ω d'affixe $\omega=\dfrac{1+i}{2}$ et
0,5 pt d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

0,5 pt **2 - a)** Vérifier que : $\dfrac{z_2-m}{z_1-m}=i\dfrac{m-1}{m-i}$.

Yassine Elamri

b) Montrer que si les points M , M_1 et M_2 sont alignés , alors le point M appartient au cercle (Γ) dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$. — **0,5 pt**

c) Déterminer l'ensemble des points M tels que les points Ω , M , M_1 et M_2 sont cocycliques.(remarquer que : $\dfrac{z_1-\omega}{z_2-\omega}=i$) — **0,75 pt**

Exercice 3 : (3 pts)

On admet que le nombre 2017 est premier et que $2016 = 2^5 3^2 7$

Soit p un nombre premier supérieur ou égale à 5 .

1 - Soit le couple $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que : $px + y^{p-1} = 2017$

a) Vérifier que : $p < 2017$. — **0,25 pt**

b) Montrer que p ne divise pas y — **0,5 pt**

c) Montrer que : $y^{p-1} \equiv 1\ [P]$ puis déduire que p divise 2016. — **0,75 pt**

d) Montrer que : $p = 7$ — **0,5 pt**

2 - Déterminer ,suivant les valeurs de p, les couples (x, y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant : $px+y^{p-1} = 2017$. — **1 pt**

Exercice 4 : (10 pts)

partie I :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \quad et \quad (\forall x \in]0; +\infty[); \quad f(x) = (1 + \frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

(on prendra $\|\vec{(i)}\| = \|\vec{(i)}\| = 2cm$)

1 - a) Montrer que la fonction f est continue à droite au point 0 — **0,25 pt**

b) Montrer que la fonction f est dérivable à droite au point 0 — **0,5 pt**

c) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$ — **0,5 pt**

2 - a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu . — **0,5 pt**

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f — **0,25 pt**

3 - a) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion I qu'on déterminera . — **0,75 pt**

b) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ (On prend $f(1) = 0,7$ et $4e^{-3} = 0,2$). — **0,5 pt**

partie II :

Soit la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par : $(\forall x \in [0; +\infty[)\ F(x) = \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$

1 - Montrer que la fonction F est continue sur $[0; +\infty[$. — **0,25 pt**

2 - a) En utilisant une intégration par parties , montrer que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[) \quad \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t$$

. — **0,5 pt**

Yassine Elamri

0,25 pt **b)** Déterminer : $\int_x^1 (1+\frac{1}{t})e^{-\frac{1}{t}}\,dt$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

0,5 pt **c)** Montrer que : $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = e^{-1}$.

3 - a) Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations
0,5 pt respectives , $x=0$, $x=2$ et $y=0$

4 - Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définit par : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n = F(n)-F(n+2)$.

a) En utilisant le théorème des accroissements finis , montrer que pour tout entier naturel n il existe un nombre réel v_n appartenant à l'intervalle $]n;n+2[$ tel que :

0,5 pt $u_n = 2(1+\frac{1}{v_n})e^{-\frac{1}{v_n}}$

0,25 pt **b)** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $2(1+\frac{1}{n})e^{-\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant 2(1+\frac{1}{n+2})e^{-\frac{1}{n+2}}$

0,25 pt **c)** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

partie III :

0,25 pt **1 - a)** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un réel $a_n\in\mathbb{R}^*$ tel que : $f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$.

0,5 pt **b)** Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

0,25 pt **c)** Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,; -\frac{1}{a_n} + ln(1+\frac{1}{a_n}) = -\frac{1}{n}$.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall t\in[0;+\infty[)\,;\quad 1-t\leqslant\frac{1}{1+t}\leqslant 1-t+t^2$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x\in[0;+\infty[)\,;\quad -\frac{x^2}{2}\leqslant -x+ln(1+x)\leqslant -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

3 - Soit n un entier naturel tel que $n\geqslant 4$

0,5 pt **a)** Vérifier que : $a_4\geqslant 1$, en déduire que : $a_n\geqslant 1$ (On admet que $e^{\frac{3}{4}}\geqslant 2$).

b) Montrer que : $1-\frac{2}{3a_n}\leqslant\frac{2a_n^2}{n}\leqslant 1$ (On pourra utiliser les questions $1-c$ et $2-b$ de
0,5 pt la partie 3).

c) Montrer que : $\sqrt{\frac{n}{6}}\leqslant a_n$ (On pourra utiliser les questions $3-a$ et $3-b$ de la partie 3).

0,5 pt En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

0,5 pt **d)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\sqrt{\frac{2}{n}}$

FIN

Yassine Elamri