ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Rattrapage 2018 juin 2018

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** ..... 3,5 **points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... 3,5 **points**
- Exercice 3 : **Calcul des probabilités** ..... 3 **points**
- Exercice 4 : **Analyse** ..... 11 **points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3,5 pts)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel réel de dimension 4 .

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\mathrm{M(x, y)} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{y} \\ 0 & \mathrm{x} \end{pmatrix}$ On considère l'ensemble $E = \{M(x, y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

0.5 pt **1 -** Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}), +)$.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que E est un sous-espace de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$

0.25 pt **b)** Montrer que l'espace vectoriel réel $(E, +, .)$ est de dimension 2

0.25 pt **3 - a)** Montrer que E est une partie stable pour la loi $\times$

0.5 pt **b)** Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.

4 - On définit dans $M_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne T par :

$$(\forall M(x, y) \in M_2(\mathbb{R}))\ (\forall M\ (x', y') \in M_2(\mathbb{R}))$$
$$M(x, y) T M\ (x', y') = M(x, y) \times M\ (x', y') - M(y, 0) \times M\ (y', 0)$$

Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers E définie par :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{C}^* & \mapsto & E \\ & x + iy & \mapsto & M(x, y) \end{array}$$

0.25 pt **a)** Montrer que E est une partie stable pour la loi T

0.25 pt **b)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers (E, T)

0.25 pt **c)** On pose : $\mathrm{E}^* = E - \{\theta\}$. Montrer que (E^*, T) est un groupe commutatif.

0.5 pt **5 - a)** Montrer que la loi T est distributive par rapport à la loi $+$ dans E

0.25 pt **b)** Montrer que $(E, +, T)$ est un corps commutatif.

Exercice 2 : (3,5 pts)

1 - Pour tout nombre complexe $Z \in \mathbb{C} - \{i\}$ on pose : $h(z) = i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)$.

0.5 pt **a)** Vérifier que : $h(z) = z \Leftrightarrow z^2 - 2\mathrm{iz} - 2 = 0$

0.5 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^2 - 2iz - 2 = 0$

2 - Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

On note a et b les deux solutions de l'équation (E) tel que : $\mathrm{Re}(a) = 1$

Et pour tout $Z \in \mathbb{C} - \{i, a, b\}$ On considère les points $M(z), M'(h(z)), A(a)$ et $B(b)$

0.75 pt **a)** Montrer que : $\left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right) = -\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$

0.75 pt **b)** En déduire que : $\left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv \pi + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})[2\pi]$.

Today better than yesterday, tomorro https://steinmath.com han today

Yassine Elamri

0.5 pt **3 - a)** Montrer que si M et A et B sont alignés alors M, A, B et M' sont alignés.

0.5 pt **b)** Montrer que si M, A et B ne sont pas alignés alors M, A, B et M' sont cocycliques.

Exercice 3 : (3 pts)

On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.

On désigne par X la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition de la face "pile". (c'est-à-dire le nombre de fois d'apparition de la face "pile" divisé par 10)

1 pt **1 - a)** Déterminer les valeurs prise par X

1 pt **b)** Déterminer la probabilité de l'événement $\left[X = \frac{1}{2}\right]$.

1 pt **2 -** Quelle est la probabilité de l'évènement : $\left[X \geq \frac{9}{10}\right]$

Exercice 4 : Problème (11 pts)

Soit f la fonction numérique de finie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}(\ln x)^2; & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note (C) sa courbe représentative dans wh repère orthonormé $(O; \vec{i}; J)$

1 - a) Montrer que f est continue à droite en 0.

0.5 pt (On pourra remarquer que : $f(x) = \left(4x^{\frac{1}{4}} \ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2$

0.75 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2 - a) Étudier la dérivabilité de f a droite en 0 , puis interpréter graphiquement le résultat

0.75 pt obtenus.

0.75 pt **b)** Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

c) Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$, en déduire que :

1 pt $(\forall x \in [0, 1]); 0 \leq \sqrt{x}(\ln x)^2 \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2$

0.5 pt **d)** Tracer la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(On prendra pour unité $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm)

3 - Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$

0.5 pt **a)** Montrer que ba fonction F est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

1 pt **b)** Calculer $F'(x)$ pour $x \geq 0$, en déduire le sens de variation de F sur l' intervalle $[0, +\infty[$.

4 - a) En utilisant la méthode d' intégration par parties, calculer $\int_a^1 \sqrt{t}(\ln t)dt$ pour tout $x > 0$.

0.75 pt

0.75 pt **b)** Montrer que pour tout $x > 0$

$$F(x) = -\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2 + \frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x - \frac{16}{27}x\sqrt{x} + \frac{16}{27}$$

c) En déduire en m^2, l'aire du domaine limite par la courbe (C) et les droites d'équations

1 pt respectives $x = 0$ et $x = 1$ et $y = 0$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than t https://steinm

5 - Pour out entier naturel n non nul, on pose $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$.

1 pt **a)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée et strictement monotone.

0.75 pt **b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

sine Elamri

https://stein

FIN

https://steinmath.com https://steinmath.com https://steinmath.com
Today better t an yesterday omorrow better than to