Exercice 1 :

On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{6U_n - 4}{U_n + 2}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Calculer U_1,U_2. (2pt)
2. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \succ 2$. (2pt)
3. (a) Vérifier que : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{-(U_n - 2)^2}{U_n + 2}; \forall n \in \mathbb{N}$. (1pt)
   (b) Etudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (1pt)
   (c) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2 < U_n \leq 3$. (1pt)
4. On pose $V_n = \dfrac{2}{U_n - 2}; \forall n \in \mathbb{N}$
   (a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison $\mathrm{q} = \dfrac{1}{2}$. (1pt)
   (b) Calculer V_0 puis écrire V_n en fonction de n. (1.5pt)
   (c) Exprimer U_n en fonction de n. (1pt)
5. Ecrire en fonction de n la somme suivante ; $S_n = V_0 + V_1 + \ldots\ldots + V_n; \forall n \in \mathbb{N}$ (1pt)
6. Ecrire en fonction de n la somme suivante ; $S'_n = V_0U_0 + V_1U_1 + \ldots\ldots + V_nU_n; \forall n \in \mathbb{N}$ (2pt)

Exercice 2 :

Soit (U_n) une suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 5 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} = \dfrac{5U_n - 4}{U_n} \end{cases}$

1. Calculer U_1,U_2. (2pt)
2. on considère la suite (V_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); V_n = \dfrac{U_n - 4}{U_n - 1}$
   (a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$, puis calculer son premier terme V_0. (1.5pt)
   (b) Exprimer V_n en fonction de n. (1pt)
   (c) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n = \dfrac{1 - 4^{n+2}}{1 - 4^{n+1}}$ (1pt)
3. on pose $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : S_n = V_0 + V_1 + \cdots\cdots + V_{n-1}$.
   Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; S_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$ (1pt)

Yassine Elamri