ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Rattrapage juin 2019

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Nombres complexes** ..... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Calcul des probabilités** ..... **3 points**
- Exercice 3 : **Structures algébriques** ..... **3.5 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** ..... **10 points**

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3.5 pts)

Soit α un nombre complexe non nul.

partie A :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

(E_α) : $z^2 - \mathrm{i}\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que le discriminant de (E_α) est : $\Delta = \alpha^2$

0,5 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α)

0,5 pt **2 -** Sachant que $\alpha = |\alpha|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, mettre les deux racines de l'équation (E_α) sous la forme exponentielle.

partie B :

On suppose que le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points Ω, M_l et M_2 d'affixes respectivement α, $z_1 = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\alpha$ et $z_2 = \dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\alpha$ et soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $R(\Omega) = M_1$ et que $R(M_1) = M_2$

0,25 pt **b)** En déduire que les deux triangles $O\Omega M_1$, et OM_1M_2 sont équilatéraux.

0,25 pt **2 - a)** Vérifier que : $z_1 - z_2 = \alpha$

0,5 pt **b)** Montrer que Les deux droites (ΩM_2) et (OM_1) sont orthogonales.

0,25 pt **c)** En déduire que $O\Omega M_1M_2$ est un losange.

0,5 pt **3 -** Montrer que pour tout réel θ, le nombre : $Z = \dfrac{z_2-\alpha}{z_1-\alpha} \div \dfrac{z_2-|\alpha|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{z_1-|\alpha|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$ est une réel.

Exercice 2 : (3 pts)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n $(n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq 3)$. On retire, sans remise, l'une après l'autre toutes les boules de cette urne. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1 pt **1 -** Quelle est la probabilité pour que les boules 1, 2 et 3 sortent consécutivement et dans cet ordre ?

1 pt **2 -** Calculer la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre (consécutivement ou pas) ?

1 pt **3 -** On considère la variable aléatoire X_n égale au nombre de tirages nécessaire pour obtenir les boules 1, 2 et 3.

Detérminer la loi de probabilité de X_n

Exercice 3 : (3.5 pts)

On considère l'espace vectoriel de dimension 2 noté $(V_2, +, .)$.

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de V_2. On pose : $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{1}{2}\vec{j}$ et $\overrightarrow{e_2} = \dfrac{1}{2}\vec{i} - \dfrac{1}{2}\vec{j}$

Soit $*$ la loi de composition interne définie par :

$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4 \quad (x\vec{i} + y\vec{j}) * (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = (xx' + yy')\vec{i} + (xy' + yx')\vec{j}$

Today better than yesterday, https://steinmath.com etter than today

Yassine Elamri

0,25 pt **1 - a)** Montrer que $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ est une base de V_2

0,25 pt **b)** Vérifier que : $\overrightarrow{e_1} * \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_1}$; $\overrightarrow{e_2} * \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_1} * \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_2} * \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{0}$

0,25 pt **c)** Montrer que : $\forall\left(X, X', Y, Y'\right) \in \mathbb{R}^4 \ \left(X\overrightarrow{e_1} + Y\overrightarrow{e_2}\right) * \left(X'\overrightarrow{e_1} + Y'\overrightarrow{e_2}\right) = XX'\overrightarrow{e_1} + YY'\overrightarrow{e_2}$

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la loi $*$ est commutative.

0,25 pt **b)** Montrer que la loi $*$ est associative.

0,25 pt **c)** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre.

0,25 pt **d)** Montrer que $\left(V_2, +, *\right)$ est un anneau commutatif unitaire.

3 - Soit $\vec{u} \in V_2 - \left\{\vec{0}\right\}$. On note $E_{\vec{u}} = \{\lambda\vec{u}/\lambda \in \mathbb{R}\}$

0,25 pt **a)** Montrer que $\left(E_{\vec{u}}, +\right)$ est un sous-groupe du groupe $\left(V_2, +\right)$

0,25 pt **b)** Montrer que $\left(E_{\vec{u}}, +, .\right)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\left(V_2, +, .\right)$

0,5 pt **c)** Montrer que : $E_{\vec{u}}$ stable pour $*$ $\iff$ la famille $\left(\vec{u} * \vec{u}, \vec{u}\right)$ est liée

4 - On suppose que : $\left(\exists\alpha \in \mathbb{R}^*\right)$; $\vec{u} * \vec{u} = \alpha\vec{u}$

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^* \to E_{\vec{u}}$

$\underline{x}$

$\vec{u}, *\big)$

$= 1 + x^2 - 2x\big(1 + x\big)\ln\big(1 + x\big)$

$= -2\big(1 + 2x\big)\ln\big(1 + x\big)$

				$+\infty$
		0	$-$	
		1		
	$\frac{1}{4}$	$-$	$\frac{1}{2}$	$-\infty$

0,5 pt **a)** Montrer qu'il existe un réel strictement positif α uniqu ue : $g\big(\alpha\big) = 0$

https://steinmath.
Today better than yesterday, tomorrow better than toda

0,25 pt **b)** Vérifier que : $\alpha < 1$ (On prendra : $\ln 2 = 0.7$)

0,5 pt **c)** En déduire que : $\left(\forall x \in]-1;\alpha[\right)$; $0 < g(x)$ et que $\left(\forall x \in]\alpha;+\infty[\right)$; $g(x) < 0$

partie B :

On considère la fonction f définie sur $I =]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

Soit (C) sa courbe représentative dans repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,5 pt **1 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,5 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,75 pt **2 - a)** Montrer que f est dérivable sur I et que : $\left(\forall x \in I\right)$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$

0,5 pt **b)** Donner le sens de variation de f sur I

0,75 pt **c)** Vérifier que : $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ et que $(\forall x \in I)$ $f(x) \leq \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$

0,25 pt **3 - a)** Donner l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

0,5 pt **b)** Montrer que : $\left(\forall x > 0\right)$; $\ln(1+x) < x$

0,25 pt **c)** En déduire que : $\left(\forall x > 0\right)$; $f(x) < x$

1pt **d)** Représenter graphiquement (T) et (C) (On prendra : $\alpha = 0.8$ et $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2cm$)

partie C :

On pose : $J = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

1 pt **1 - a)** En utilisant le changement de variable : $t = \dfrac{1-x}{1+x}$, montrer que : $J = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$

0,5 pt **b)** - Déterminer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , la tangente (T), la droite d'équation $x = 0$ et la droite d'équation $x = 1$

1 pt **2 -** En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer : $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x}\mathrm{d}x$

FIN

Yassine Elamri