ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2019

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** ..... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Arithmétiques** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** ..... **10 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3.5 points)

On rappelle que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right)\left(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\right) \; ; \; (x+yi)(a+bi) = xa + (x^2 b + a^2 y)i$$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$.

0,5 pt **b)** Montrer que la loi $*$ est associative sur $\mathbb{C}$.

0,25 pt **c)** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre e que l'on déterminera .

0,25 pt **d)** Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Montrer que le nombre complexe $x+yi$ admet le nombre complexe $\frac{1}{x} - \frac{y}{x^4}i$ comme symétrique pour la loi $*$

2 - On considère le sous-ensemble E de $\mathbb{C}$ défini par : $E = \{x+yi / x \in \mathbb{R}_+^* \; ; \; y \in \mathbb{R}\}$

0,25 pt **a)** Montrer que E est stable pour la loi $*$ dans $\mathbb{C}$.

0,5 pt **b)** Montrer que $(E, *)$ est un groupe commutatif.

0,5 pt **3 -** On considère le sous-ensemble G de E défini par : $G = \{1+yi / y \in \mathbb{R}\}$

Montrer que G est un sous-groupe de $(E, *)$.

4 - On considère l'ensemble $F = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} / (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \right\}$

0,25 pt **a)** Montrer que F est stable pour la loi $\times$ dans $M_2(\mathbb{R})$.

0,5 pt **b)** On considère l'application φ : $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x+yi & \longmapsto & M(x^2, y) \end{array}$

Montrer que φ est un isomorphisme de $(E, *)$ vers $(F, \times)$

0,25 pt **c)** En déduire que $(F, \times)$ est un groupe commutatif.

Exercice 2 : (3.5 pts)

Soit m un nombre complexe non réel $(m \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R})$

I - On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation, d'inconnue z définie par :

$$(E) : z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

0,5 pt **b)** Déterminer z_1 et z_2, les deux solutions de l'équation (E)

2 - On suppose dans cette question que $m = \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

0,5 pt **a)** Déterminer le module est un argument de $z_1 + z_2$.

0,25 pt **b)** Montrer que si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2 = 2i$

Today better t https://steinmath.com day tomorrow better than today

Yassine Elamri

II - Le plan complexe rapporté un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$,

On considère les points suivants :

A, B et C d'affixes respectives $a = 1+i$, $b = (1+i)m$ et $c = 1-i$

D l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et Ω le milieu du segment $[CD]$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que l'affixe de Ω est $\omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$.

0,25 pt **b)** Calculer $\frac{b-a}{\omega}$.

0,5 pt **c)** En déduire que $(O\Omega)\perp(AB)$ et que $AB = 2O\Omega$.

2 - La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'affixe h

0,5 pt **a)** Montrer que $\frac{h-a}{b-a}$ est réel et que $\frac{h}{b-a}$ est imaginaire pur.

0,25 pt **b)** En déduire h en fonction de m.

Exercice 3 : (3 points)

On admet que 2969 (l'année amazighe actuelle) est un nombre premier.

Soient n et m deux entiers naturels vérifiant : $n^8 + m^8 \equiv 0\ [2969]$

1 - On suppose dans cette question que 2969 que ne divise pas n.

0,5 pt **a)** En utilisant le théorème de Bezout, montrer que : $(\exists u \in \mathbb{Z})\ : u \times n \equiv\ [2969]$.

0,5 pt **b)** En déduire que : $(u \times m)^8 \equiv -1\ [2969]$ et que $(u \times m)^{2968} \equiv -1\ [2969]$

(On remarque que : $2968 = 8 \times 371$)

0,5 pt **c)** Montrer que 2969 ne divise pas $u \times m$

0,5 pt **d)** En déduire qu'on a aussi $(u \times m)^{2968} \equiv 1\ [2969]$.

0,5 pt **2 - a)** En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 divise n.

0,5 pt **b)** Montrer que : $n^8 + m^8 \equiv 0\ [2969] \iff n \equiv 0\ [2969]$ et $m \equiv [2969]$.

Exercice 4 : (10 points)

PARTIE I - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x\left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1\right)$ et on note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,5 pt **2 - a)** Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f'(x) = 4\left(e^{-x} - 1\right)(1-x)$

0,75 pt **b)** Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, puis donner son tableau de variations.

0,5 pt **c)** Montrer que : $\exists!\alpha \in \left]\frac{3}{2}; 2\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$ (On prendra $e^{\frac{3}{2}} = 4.5$)

0,25 pt **d)** Vérifier que : $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$

0,5 pt **3 - a)** En appliquant le théorème de Rolle à la fonction f', montrer qu'il existe x_0 de l'intervalle $]0;1[$ tel que : $f''(x_0) = 0$

Yassine Elamri

0,5 pt **b)** En appliquant le théorème des accroissement finis à la fonction f'' , montrer que pour tout x différent de x_0 de l'intervalle $[0;1]$, on a : $\dfrac{f''(x)}{x-x_0} > 0$

0,25 pt **c)** En déduire que $I(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$.

0,5 pt **4 - a)** Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.

0,5 pt **b)** Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (On prendra : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$, $f(1) = -0,5$ et il n'est pas demandé de représenter le point I)

0,25 pt **5 - a)** Vérifier que : $(\forall x \in]-\infty;\alpha])$; $f(x) \leq 0$

0,75 pt **b)** Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2\alpha(\alpha^2-3)}{3}$, puis en déduire que : $0 < \alpha \leq \sqrt{3}$

0,5 pt **c)** Calculer en fonction de α, en cm^2 du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations respectives $y = 0$, $x = 0$ et $x = \alpha$

PARTIE II - On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 < \alpha \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + f(u_n)$$

0,5 pt **1 - a)** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n < \alpha$ (utiliser 5-a) de la PARTIE I)

0,25 pt **b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2 - On suppose que $0 \leq u_0$ et on pose $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) = e^{-x} + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$

0,5 pt **a)** Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) > 0$ (On prendra : $\ln(2) = 0,69$)

0,5 pt **b)** En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq u_n$ (On remarque que : $f(x) + x = 4xg(x)$)

0,25 pt **c)** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

0,5 pt **d)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3 - On suppose que $u_0 < 0$

0,5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)$

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \leq u_0 + nf(u_0)$

0,25 pt **c)** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

FIN

Yassine Elamri