ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Rattrapage. juillet 2020

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Arithmétique** (au choix) ..... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Structures Algébriques** (au choix) ..... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Les Nombres Complexes** (obligatoire) ..... **3.5 points**
- Exercice 4 : **L'Analyse** (obligatoire) ..... **13 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3.5 pts / au choix)

Soit p et q deux nombres premiers vérifiant : $p < q$ et $9^{p+q-1} \equiv 1[pq]$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que p et 9 sont premiers entre eux.

1 pt **b)** En déduire que : $9^{p-1} \equiv 1[p]$ et

0.5 pt **2 - a)** Montrer que $p-1$ et q sont pre

0.5 pt **b)** En utilisant le théorème de BE

0.5 pt **3 - a)** En utilisant le théorème de FE

0.5 pt **b)** En déduire que : $q = 5$.

Exercice 2 : (3.5 pts)au c

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices c

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, .)$ est un esp

un anneau non commutatif unitaire de zer

On considère le sous-ensemble : $E = \left\{ M(\right.$

Première Partie :

0.25 pt **1 - a)** Montrer que E est un sous-espace vectoriel de ($_3(\mathbb{R}), +, .)$

0.5 pt **b)** Déterminer une base de $(E, +, .)$.

2 - a) Vérifier que :

0.25 pt $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \forall (x',y',z') \in \mathbb{R}^3 : M(x,y,z) \times M(x',y',z') = M(xx' - yy', xy' + yx', zz')$

0.5 pt **b)** Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.

Deuxième Partie :

On considère le sous-ensemble F de E des matrices de la forme : $M(x,y,0)$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

0.25 pt **1 -** Montrer que F est un sous-groupe de $(E, +)$.

2 - On note φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers E definie par :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x+iy) = M(x,y,0)$

0.5 pt **a)** Monter que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E, \times)$.

0.5 pt **b)** En déduire que $(F^*, \times)$ est un groupe commutatif .(F^* désigne $F - \{0\}$)

0.5 pt **c)** Montrer que $(F, +, \times)$ est un corps commutatif dont on précisera l'unité.

0.25 pt **3 - a)** Vérifier que : $(\forall M(x,y,0) \in F) : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times M(x,y,0) = \mathcal{O}$.

htt
Yassi

https://steinmath.com day better than yesterday, tomorrow better than today

b) En déduire qu'aucun des éléments de sous-espace F , n'admet un inverse pour la multiplication dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. — **0.25 pt**

Exercice 3 : (3.5 pts) Obligatoire

Soit m un nombre réel non nul .

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, les deux equation suivantes :

$(E) : z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0$ et $(F) : z^3 + 2(1-i)z^2 + (1 + m^2 - 4i)z - 2i(1 + m^2) = 0$.

1 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). — **0.5 pt**

2 - a) Montrer que l'équation (F) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera. — **0.25 pt**

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (F). — **0.5 pt**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On Considère les deux points : $A(-1 + im)$ et $B(-1 - im)$.

Soit Ω le milieu du segment $[AB]$, A' le milieu du segment $[OB]$ et B' est le milieu du segment $[OA]$.

la rotation de centre Ω et d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ transforme A en $P(p)$, la rotation de centre A' et d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ transforme B en $Q(q)$, la rotation de centre B' et d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ transforme O en $R(r)$

1 - Montrer que $p = -1 + m$, $\quad q = \frac{1-i}{2}(-1 - im)$ et que $r = \bar{q}$. — **1.5 pt**

2 - a) Vérifier que : $q - r = -ip$. — **0.25 pt**

b) En déduire que : $OP = QR$ et les deux droites (OP) et (QR) sont orthogonales. — **0.5 pt**

Exercice 4 : (13 pts)Obligatoire

Première Partie :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, 1]$ par $f(x) = x\ln(2 - x)$ et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé direct $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 - a) Montrer que f est dérivable sur I et que : $\forall x \in I : f'(x) = \ln(2 - x) - \frac{x}{2 - x}$. — **0.75 pt**

b) Montrer que la fonction f' est strictement décroissante sur I. — **0.5 pt**

c) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que : $f'(\alpha) = 0$ et que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2 - \alpha}$. — **0.75 pt**

2 - a) Étudier les variations de f, puis donner son tableau de variations . — **0.75 pt**

b) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est concave. — **0.5 pt**

c) Montrer que : $(\forall t \in I) : \quad f(x) \leqslant f'(t)(x - t) + f(t)$. — **0.5 pt**

d) En déduire que : $(\forall x \in I) : \quad f(x) \leqslant x\ln(2)$ et $f(x) \leqslant -x + 1$. — **0.5 pt**

3 - Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ (On prendra $\|\vec{i}\| = 2cm$.) — **0.5 pt**

4 - Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe et les droites d'équations $x = 0$ $x = 1$ et $y = 0$ respectivement. — **0.75 pt**

Yassine Elamri

Deuxième Partie :

Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2.

On considère la fonction f_n définie sur $I = [0, 1]$ par $f_n(x) = x^n \ln(2 - x)$.

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que f_n est positive sur I et que $f_n(0) = f_n(1)$.

0.5 pt **b)** Montrer qu'il existe au moins $\alpha_n \in]0, 1[$ tel que : $f'_n(\alpha_n) = 0$.

2 - a) Montrer que f_n est dérivable sur I et que $\forall x \in I : f'_n(x) = x^{n-1} g_n(x)$ où

0.75 pt $g_n(x) = n \ln(2 - x) - \dfrac{x}{2 - x}$.

0.5 pt **b)** Montrer que la fonction g_n est strictement décroissante sur I.

0.5 pt **c)** En déduire que α_n est unique.

3 - On considère la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ ainsi définie.

1 pt **a)** Montrer que $\forall n \geqslant 2 : f_n(\alpha_n) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{\alpha_n^{n+1}}{2 - \alpha_n}$, en déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n) = 0$.

b) Montrer que $\forall n \geqslant 2 : g_n(\alpha_{n+1}) = -\ln(2 - \alpha_{n+1})$, en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est

1 pt strictement croissante.

0.25 pt **c)** Montrer que $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente.

0.5 pt **d)** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$. .

Troisième Partie :

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

0.75 pt **1 -** Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante , en déduire qu'elle est convergente.

0.5 pt **2 -** En utilisant une intégration, par partie, montrer que : $I_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2 - x}\mathrm{d}x$.

0.75 pt **3 -** Montrer que : $(\forall n \geqslant 2) : 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

FIN

Yassine Elamri

Today b an yesterday, tomorrow better than today