ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juillet 2020

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Le candidat doit traiter **exercice 3** et **exercice 4**
Et choisir de traiter **exercice 1** ou bien **exercice 2**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Arithmétiques** (au choix avec exercice 2) ..... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Structures algébriques**(au choix avec exercice 1) ..... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** (obligatoire) ..... **3.5 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** (obligatoire) ..... **13 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3.5 points/au choix)

Si tu choisis de traiter **Exercice 1**, il ne faut pas traiter **Exercice 2**

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (D) : $\quad 7x^3-13y=5$

1 - Soit $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ une solution de l'équation (D).

0,5 pt **a)** Montrer que x et 13 sont premier entre eux.

0,5 pt **b)** En déduire que : $x^{12}\equiv 1\ [13]$

1 pt **c)** Montrer que : $x^3\equiv 10\ [13]$

0,5 pt **d)** En déduire que : $x^{12}\equiv 3\ [13]$

1 pt **2 -** Déduire des questions précédentes, que l'équation (D) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Exercice 2 : (3.5 points/au choix)

Si tu choisis de traiter **Exercice 2**, il ne faut pas traiter **Exercice 1**

On note par $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux.

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau non commutatif unitaire d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{R}^*,\times)$ est un groupe commutatif.

On considère l'ensemble E de $M_2(\mathbb{R})$ défini par : $E=\left\{\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}/x\in\mathbb{R}\text{ et }y\in\mathbb{R}^*\right\}$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,5 pt **b)** Montrer que la multiplication n'est pas commutative dans E.

0,5 pt **c)** Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ (\forall y\in\mathbb{R}^*)$; $\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-\frac{x}{y}\\0&\frac{1}{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{x}{y}\\0&\frac{1}{y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

0,5 pt **2 -** Montrer que $(E,\times)$ est un groupe non commutatif.

3 - On considère le sous-ensemble F de E défini par : $F=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}x&x-1\\0&x\end{pmatrix}/x\in\mathbb{R}^*\right\}$

0,5 pt **a)** Montrer que l'application φ définie par : $(\forall x\in\mathbb{R}^*);\quad \varphi(x)=M(x)$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E,\times)$.

1 pt **b)** En déduire que $(F,\times)$ est un groupe commutatif dont on précisera l'élément neutre.

Exercice 3 : (3.5 points/obligatoire)

Soit m un nombre complexe non nul.

Première partie :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z, $\quad (E): z^3-2mz^2+2m^2z-m^3=0$

0,5 pt **1 -** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) (On remarque que m est une solution de l'équation (E))

2 - On note z_1 et z_2 les deux autres solutions de l'équation (E) autre que m.

0,25 pt **a)** Vérifier que : $\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{1}{m}$.

0,5 pt **b)** Dans le cas où $m=1+\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$, écrire sous la forme algébrique z_1 et z_2 .

https://stelmath.com better than yesterday, tomorrow better than today
Yassine Ela

Deuxième partie :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = me^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = me^{-i\frac{\pi}{3}}$.

On note

— P le centre de la rotation de centre $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme O en A.

— Q le centre de la rotation de centre $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme A en B.

— R le centre de la rotation de centre $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme B en O.

0,25 pt **1 -** Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés.

1 pt **2 - a)** Montrer que l'affixe de P est $p = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ et que l'affixe de R est $r = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

0,5 pt **b)** Montrer que l'affixe de Q est $q = m\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

0,5 pt **3 -** Montrer que $OQ = PR$ et les deux droites (OQ) et (PR) sont perpendiculaires.

Exercice 4 : (13 points/obligatoire)

Première partie :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } (\forall x \in]0; +\infty[) \quad ; \quad f(x) = x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$)

0,5 pt **1 -** On appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \longmapsto \ln(t)$ sur l'intervalle $[x; x+1]$, montrer que : (P) $(\forall x \in]0; +\infty[) \quad ; \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

0,5 pt **2 - a)** En utilisant la proposition (P), montrer que f est dévrivable à droite en 0.

0,5 pt **b)** En utilisant la proposition (P), montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche paraboliques dont on précisera la direction.

0,75 pt **3 - a)** Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[) \quad ; \quad f'(x) = 3x^2\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(1+x)}\right)$$

0,5 pt **b)** En déduire que f est strictement croissante sur I (On pourra utiliser la proposition (P))

0,25 pt **c)** Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4 - pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose : $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

0,75 pt **a)** Vérifier que $(\forall x \in]0; +\infty[) \quad ; \quad g'(x) = 2x\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(x+1)}\right)$, en déduire que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

0,5 pt **b)** Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$,une solution unique notée α puis vérifier que $\alpha \in]1; 2[$ (On prendra $\ln(2) = 0,7$ et $\ln\left(\frac{3}{2}\right) = 1,5$))

0,5 pt **c)** En déduire que les seuls solutions de l'équation $f(x) = x$ sont 0 et α.

Toda r than yesterday, tomorrow better than today

Yassine Elamri

0,5 pt **5 - a)** Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$ (On précisera la demi-tangente à droite en O et la branche parabolique de $(\mathcal{C})$)

0,25 pt **b)** Montrer que f est une bijection de I vers I . (On notera f^{-1} sa bijection réciproque)

Deuxième partie :

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $0 < u_0 < \alpha$ et $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$

0,5 pt **1 -** Montrer que par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N});\quad 0 < u_n < \alpha$.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $g\,(]0;\alpha[) =]0;1[$.

0,5 pt **b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante.

0,25 pt **c)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

0,5 pt **3 -** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Troisième partie :

On considère la fonction F définie sur I par : $(\forall x \in I)\quad ;\quad F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$

0,5 pt **1 - a)** Étudier suivant les valeurs de x, le signe de $F(x)$.

0,5 pt **b)** Montrer que la fonction F est dérivable sur I et déterminer sa dérivée première F'.

0,25 pt **c)** En déduire que F est strictement décroissante sur I.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x \in [1;+\infty[)\quad ;\quad F(x) \leq (1-x)\ln(2)$.

0,25 pt **b)** En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

0,5 pt **3 - a)** En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in [1;+\infty[)\quad ;\quad F(x) = \frac{\ln(2)}{4} - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\int_x^1 \frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t$$

.

0,5 pt **b)** Calculer $\displaystyle\int_x^1 \frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t$ pour tout $x \in]0;+\infty[$ (On remarque que $\dfrac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \dfrac{1}{t+1}$)

0,5 pt **c)** En déduire que : $(\forall x \in [1;+\infty[)\,;\quad F(x) = \dfrac{5}{24} - \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4}\ln(1+x) - \dfrac{x^4}{4}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

0,5 pt **d)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$, en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$

4 - Pour tout entier naturel non nul n,on pose : $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.

0,5 pt **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$:

$$-\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq -\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0,5 pt **b)** En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad ;\quad -\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq v_n \leq -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

(On remarquera que : $\dfrac{2k+1}{2n} < \dfrac{k+1}{n}$)

0,25 pt **c)** Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

FIN

Toda r than yesterday, tomorrow better than today

Yassine Elamri