ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Rattrapage juin 2021

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Problème d'analyse** ..... **8 points**
- Exercice 2 : **Problème d'analyse** ..... **4 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** ..... **4 points**
- Exercice 4 : **Structures algébriques** ..... **4 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (8 pts)

Partie I :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-\infty; 1[$ par : $f(x) = \ln(1-x)$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que la fonction f est continue sur I

0,25 pt **b)** Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur I

0,75 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

0,5 pt **d)** Interpréter graphiquement les résultats obtenus

0,25 pt **e)** Donner le tableau de variations de f

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la courbe (C) est concave.

0,25 pt **b)** Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0,25 pt **3 - a)** Montrer que f est une bijection de I vers $\mathbb{R}$

On note f^{-1} sa bijection réciproque.

0,25 pt **b)** Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

0,25 pt **c)** Vérifier que : $f^{-1}(-1) = 1 - e^{-1}$

Partie II :

Pour tout réel x et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$P_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

0,5 pt **1 -** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel $x_n \in]0; 1[$ tel que : $P_n(x_n) = 1$

0,5 pt **2 -** Déterminer le réel $\alpha = x_2$ et vérifier que : $0 < \alpha < 1$

0,5 pt **3 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $P_{n+1}(x_n) > 1$

0,5 pt **b)** En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ ainsi définie est strictement décroissante.

0,25 pt **c)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $x_n \in]0; \alpha]$

0,25 pt **d)** Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

4 - pour tout réel $x \in I$ et pour tout entier $n \geq 2$, on pose : $f_n(x) = f(x) + P_n(x)$

0,5 pt **a)** Montrer que : $\left(\forall x \in I\right)$; $\left(\forall n \geq 2\right)$ $f_n'(x) = \dfrac{-x^n}{1-x}$

0,25 pt **b)** Montrer que : $\left(\forall x \in [0; \alpha]\right)$; $\left(\forall n \geq 2\right)$ $\left|f_n'(x)\right| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

0,5 pt **c)** En déduire que : $\left(\forall x \in [0; \alpha]\right)$; $\left(\forall n \geq 2\right)$ $|f_n(x)| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

0,5 pt **d)** Montrer que : $\left(\forall n \geq 2\right)$ $|f(x_n) + 1| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

0,5 pt **e)** En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow bette https://steinmath.co

Exercice 2 : (4 pts)

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^t - \frac{t^2}{2}\mathrm{d}t$

0,5 pt **1 - a)** Déterminer le signe de $F(x)$ en fonction de x

1 pt **b)** Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée première $F'(x)$

0,5 pt **2 - a)** En utilisant la méthode d'intégration par partie, montrer que :

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2}\mathrm{d}x$$

0,5 pt **b)** Calculer $\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x$

3 - On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\Big(\forall n \in \mathbb{N}^*\Big)\ ;\ u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left((n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2}\mathrm{d}x\right)$$

0,5 pt **a)** Vérifier que : $\Big(\forall n \in \mathbb{N}^*\Big)\ ;\ u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)F\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)F\left(\frac{k}{n}\right)$

0,5 pt **b)** Montrer que : $\Big(\forall n \in \mathbb{N}^*\Big)\ ;\ u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F\left(\frac{k}{n}\right)$

0,5 pt **c)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 : (4 pts)

m est un nombre complexe différent de 2 et de $-\mathrm{i}$

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E)\ :\ z^2 - (m-\mathrm{i})z - \mathrm{i}m = 0$$

0,5 pt **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $(m+\mathrm{i})^2$

0,5 pt **b)** Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de (E)

0,75 pt **c)** Sachant que $m = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}$, écrire le nombre $z_1 + z_2$ sous forme exponentielle.

2 - On considère les points A, B et M d'affixes respectifs 2, $-\mathrm{i}$ et m et soit M' le symétrique de M par rapport a l'axe imaginaire.

0,5 pt **a)** Déterminer en fonction de m l'affixe de M'

0,75 pt **b)** Déterminer en fonction de m l'affixe du point N tel que le quadrilatére $ANMB$ soit un parallélogramme.

1 pt **c)** Montrer que les deux droites (AM) et (BM') sont perpendiculaires si et seulement si $\Re e\Big((2-i)m\Big) = \Re e(m^2)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than to https://stein

Exercice 4 : (4 pts)

Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$

Soit p un nombre premier impair tel que : p divise A

1 pt **1 - a)** Montrer que $a^7 \equiv 1[p]$, en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a^{7n} \equiv 1[p]$

1 pt **b)** Montrer que a et p sont premiers entre eux, en déduire que : $(\forall m \in \mathbb{N})$; $a^{(p-1)m} \equiv 1[p]$

2 - On suppose que 7 ne divise pas $p - 1$

0,5 pt **a)** Montrer que : $a \equiv 1[p]$

0,5 pt **b)** En déduire que : $p = 7$

1 pt **3 -** Montrer que si p un nombre premier impair tel que : p divise A, alors : $p = 7$ ou $p \equiv 1[7]$

Yassine Elamri

FIN

T- https://steinmath.com er than yesterday, tomorrow better than today