ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2021

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 3 exercices :

- Exercice 1 : **Problème d'analyse** ..... **12 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **4 points**
- Exercice 3 : **Arithmétiques** ..... **4 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (12 pts)

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \dfrac{-2e^x}{1+e^x} + nx$.

Soit $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. *(on prend* $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1cm$*)*

Partie I :

0.5 pt **1 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f_n(x) - nx + 2)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 pt **b)** Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_n)$ admet, en $-\infty$, une asymptote (Δ_n) dont on déterminera une équation cartésienne.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f_n'(x) = \dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\dfrac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$.

0.5 pt **c)** En déduire le sens de variations de f_n sur $\mathbb{R}$. *(On distinguera les deux cas : $n = 0$ et $n \geq 1$)*

0.5 pt **3 - a)** Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_n)$ au point I d'abscisse 0.

0.5 pt **b)** Montrer que le point I est le seul point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C}_n)$.

0.5 pt **4 -** Représenter graphiquement dans le même repère, les deux courbes $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

5 - Pour tout réel $t > 0$, on pose $A(t)$ l'aire du domaine plan limité par $(\mathcal{C}_n)$ et les droites d'équations respectives : $y = nx - 2$, $x = 0$ et $x = t$

0.5 pt **a)** Calculer $A(t)$ pour tout $t > 0$

0.5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$

Partie II : On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = f_0(u_n)$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que l'équation $f_0(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

0.5 pt **b)** Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$; $|f_0'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

0.5 pt **b)** En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |\alpha|$.

0.5 pt **c)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers α.

Partie III : On suppose dans cette partie que n est un entier tel que $n \geq 2$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique réel x_n solution de l'équation $f_n(x) = 0$.

0.5 pt **b)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $0 < x_n < 1$. *(On prendra* $\dfrac{2e}{1+e} < 1.47$*)*

0.5 pt **2 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\quad f_{n+1}(x_n) > 0$

0.5 pt **b)** En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

0.5 pt **c)** Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

0.5 pt **3 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\quad \dfrac{1}{n} < x_n < \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2e}{1+e}\right)$.

0.5 pt **b)** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = 1$.

0.5 pt **4 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $x_n \leq x_2$

0.5 pt **b)** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n$.

Yassine Elamri

Today r than yesterday, tomorrow better than today

Exercice 2 : (4 pts)

Soient a , b et c trois nombres complexes non nuls tel que : $a+b \neq c$

0.5 pt **1 - a)** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(a+b+c)\,z+c\,(a+b)=0$

0.5 pt **b)** On suppose dans cette question que : $a=i$, $b=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c=a-b$

Ecrire les deux solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

2 - Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les trois points $A\,(a)$, $B\,(b)$ et $C\,(c)$ qu'on suppose non alignés.

Soit $P\,(p)$ le centre de rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ qui transforme B en A

et $Q\,(q)$ le centre de rotation d'angle $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ qui transforme C en A

et $D\,(d)$ le milieu du segment $[BC]$.

1 pt **a)** Montrer que : $2p=b+a+(a-b)\,i$ et $2q=c+a+(c-a)\,i$

0.5 pt **b)** Calculer : $\dfrac{p-d}{q-d}$

0.5 pt **c)** En déduire la nature du triangle PDQ

3 - Soient E le symétrique de B par rapport à P et F le symétrique de C par rapport à Q et K le milieu du segment $[EF]$.

0.5 pt **a)** Montrer que l'affixe de K est $k=a+\dfrac{i}{2}\,(c-b)$.

0.5 pt **b)** Montrer que les points K , P , Q et D sont cocycliques.

Exercice 3 : (4 pts)

Partie I : On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $47x-43y=1$

0.25 pt **1 -** Vérifier que le couple $(11,12)$ est une solution particulière de l'équation (E).

0.75 pt **2 -** Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

Partie II : On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (F) : $x^{41}\equiv 4\,[43]$.

1 - Soit $x\in\mathbb{Z}$ une solution de l'équation (F).

0.5 pt **a)** Montrer que x et 43 sont premiers entre eux, en déduire que : $x^{42}\equiv 1\,[43]$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $4x\equiv 1\,[43]$, en déduire que : $x\equiv 11\,[43]$.

0.5 pt **2 -** Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (F).

Partie III : On considère dans $\mathbb{Z}$ le système à deux équations suivant (S) : $\begin{cases} x^{41}\equiv 4\,[43] \\ x^{47}\equiv 10\,[47] \end{cases}$.

1 - Soit x une solution du système (S).

0.5 pt **a)** Montrer que x est solution du système (S') : $\begin{cases} x\equiv 11\,[43] \\ x\equiv 10\,[47] \end{cases}$.

0.5 pt **b)** En déduire que : $x\equiv 527\,[2021]$ *(On pourra utiliser la partie* I *).*

0.5 pt **2 -** Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

FIN

Today better than ye https://steinmath.com omorrow better than today

Yassine Elamri