ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : rattrapage juillet 2022

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Problème d'analyse** ..... **10 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Structures algébriques** ..... **3.5 points**
- Exercice 4 : **Arithmétique** ..... **3 points**

Yassine Elamri

Exercice 1 : (10 points)

Partie A :

0.25 pt **1 -** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, 1+x \leq e^x$

0.25 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,;\, 0 \leq 1-e^{-x} \leq x$

0.5 pt **b)** En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,;\, 0 \leq 1-x+\dfrac{x^2}{2}-e^{-x} \leq \dfrac{x^3}{6}$

0.5 pt **c)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-x-e^{-x}}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $I=[0,+\infty[$ par :

$$f(0)=1 \text{ et } \forall x \in]0,+\infty[\ ;\quad f(x)=\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}.$$

Et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que f est continue à droite en 0

0.25 pt **b)** Vérifier que : $(\forall x>0)\,;\, \dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{1-2x-e^{-2x}}{x^2} - \dfrac{1-x-e^{-x}}{x^2}$

0.5 pt **c)** En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que la nombre dérivé à droite en 0 est $-\dfrac{3}{2}$

0.5 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x>0)\,;\, f'(x)=\dfrac{e^{-2x}}{x^2}\left(2x+1-e^x(1+x)\right)$

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x>0)\,;\, f'(x) \leq -e^{-2x}$ (On pourra utiliser : $1+x \leq e^x$)

0.25 pt **c)** En déduire le sens de variations de f sur I

3 - On admet que : $(\forall x>0)\,;\, f''(x)=\dfrac{e^{-2x}}{x^3}\left(-4x^2-4x-2+e^x(2+2x+x^2)\right)$

0.25 pt **a)** Montrer que : $(\forall x \geq 0)\,;\, 1+x+\dfrac{x^2}{2} \leq e^x$

0.5 pt **b)** En déduire que : $(\forall x>0)\,;\, f''(x)>0$

4 - On admet que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\dfrac{3}{2}$

0.5 pt **a)** Montrer $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

0.5 pt **b)** En déduire que : $(\forall x \in I)\,;\, |f'(x)| \leq \dfrac{3}{2}$

0.5 pt **5 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 pt **b)** Dresser le tableau de variations de f

c) Déterminer la position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à sa demi-tangente au point $T(0,1)$ 0.25 pt

0.5 pt **d)** Représenter graphiquement la courbe $(\mathscr{C})$ dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Partie C :

1 - Pour tout x de $[0,1]$, on pose , $g(x)=f(x)-x$

0.5 pt **a)** Montrer que g est une bijection de $[0,1]$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

0.5 pt **b)** Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha)=\alpha$

Yassine Elamri

Today b https://steinmath.com yesterday, tomorrow better than today

2 - Pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, on considère les nombres réels $x_k = \dfrac{k\alpha}{n}$ et on pose , $I_k = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt$ et $J_k = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dt$

0.5 pt **a)** Montrer que : $\forall k \in \{0,1,\ldots,n\}\,;\ |J_k - I_k| \leq \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t-x_k)dt$

0.5 pt **b)** En déduire que : $\forall k \in \{0,1,\ldots,n\}\,;\ |J_k - I_k| \leq \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^2$

3 - On pose : $L = \displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)dt$

0.5 pt **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\dfrac{\alpha}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\dfrac{k\alpha}{n}\right) - L\right| \leq \dfrac{3}{4}\dfrac{\alpha^2}{n}$

0.5 pt **b)** En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\dfrac{k\alpha}{n}\right) = \displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)dt$

Exercice 2 : (3.5 pts)

Soit $m \in \mathbb{C}\backslash\{-1,0,1\}$

Partie I : On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z. $(E_m) : mz^2-(m-1)^2z-(m-1)^2 = 0$

0.25 pt **1 - a)** Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta = (m^2-1)^2$

0.5 pt **b)** Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m)

0.5 pt **2 -** On prend uniquement dans cette question $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

Partie II : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les deux points A et B d'affixes respectifs $m-1$ et $\dfrac{1}{m}-1$

0.5 pt **1 -** Montrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $m \in \mathbb{R}$.

2 - On suppose que m n'est pas un nombre réel.

Soient C l'image du piont B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et D l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AD]$ et $[OB]$.

0.5 pt **a)** Montrer que l'affixe du point C est : $c = m-1+\left(\dfrac{1}{m}-m\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ et que l'affixe du point D est : $d = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}}$

0.5 pt **b)** Montrer que : $2(p-r) = m-1+\left(\dfrac{1}{m}-m\right)\left(e^{i\frac{\pi}{3}}-1\right)$ et $2(q-r) = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}}-\left(\dfrac{1}{m}-m\right)$

0.25 pt **c)** Montrer que : $q-r = e^{i\frac{\pi}{3}}(p-r)$

0.5 pt **d)** Quelle est la nature du triangle PQR ? (justifier votre réponse)

Yassine Elamri

Exercice 3 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (La loi $\times$ étant la multiplication usuelle des matrices)

Pour tout réel a on pose $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & 3 & -1 \\ 2a+3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ et soit $G = \{M(a)/a \in \mathbb{R}\}$

1 - Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ vers $M_3(\mathbb{R})$ définie par : $(\forall a \in \mathbb{R})\,;\ \varphi(a) = M(a)$

0.5 pt **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

0.5 pt **b)** Montrer que $\varphi(\mathbb{R}) = G$, en déduire que $(G, \times)$ est un groupe commutatif.

0.5 pt **c)** Déterminer J l'élément neutre dans $(G, \times)$

0.5 pt **d)** Déterminer l'inverse de $M(a)$ dans $(G, \times)$

0.5 pt **e)** Résoudre dans $(G, \times)$ l'équation : $M(1) \times X = M(2)$

0.25 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R})\,;\ M(a) \times J = M(a) \times I$

0.5 pt **b)** En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $M(a)$ n'est pas inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

c) Vérifier que les matrices de la forme $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 3 & 0 \\ 3x+5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$, sont solutions dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ de l'équation : $M(1) \times X = M(2)$ **0.25 pt**

Exercice 4 : (3 points)

0.5 pt **1 -** Montrer que 137 est un nombre premier.

0.5 pt **2 -** Déterminer un couple (u, v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $38u + 136v = 2$

3 - Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que : $x^{38} \equiv 1[137]$

0.5 pt **a)** Montrer que x et 137 sont premiers entre eux.

0.2 pt **b)** Montrer que : $x^{136} \equiv 1[137]$

0.5 pt **c)** Montrer que : $x^2 \equiv 1[137]$

0.5 pt **4 -** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : x^{19} \equiv 1[137]$

FIN

Yassine Elamri

Today r than yesterday, tomorrow better than today