ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2022

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Problème d'analyse** ..... **10 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Arithmétiques** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **Structures algébriques** ..... **3.5 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (10 pts)

Partie A :

0,25 pt **1 -** Vérifier que, $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \;\; ; \;\; 0 \leq 1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} \leq x^3$

0,25 pt **2 -** En déduire que, $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \;\; ; \;\; 0 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x) \leq \frac{x^4}{4}$

Partie B : On condidère la fonction f définie sur $I = [0; +\infty[$ par :

$$f(0) = \tfrac{1}{2} \text{ et pour tout } x \text{ de }]0; +\infty[: f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonrmé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que f est continue à droite en 0

0,5 pt **b)** Montrer que f est dérivable à droite en 0

0,5 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

0,5 pt **2 - a)** Montrer que, $(\forall x \in]0; +\infty[) \;\; ;, \;\; f'(x) = -\frac{g(x)}{x^3}$

où : $g(x) = x + \frac{x}{x+1} - 2\ln(1+x)$

0,5 pt **b)** Montrer que , $(\forall x \in I) \;\; ; \;\; 0 \leq g'(x) \leq x^2$

0,25 pt **c)** Déduire que, $(\forall x \in I) \;\; ; \;\; 0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{3}$

0,25 pt **d)** Déterminer le sens de variations de f

0,25 pt **3 - a)** Dresser le tableau de variation de f

0,5 pt **b)** Représenter grahiquement la courbe (C) dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

Partie C :

1 - Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0; 1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

2 - On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \tfrac{1}{3} \text{ et } \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

0,5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_n \in [0; 1]$

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)|u_n - \alpha|$

0,5 pt **c)** Montrer par récurrence que, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

0,5 pt **d)** En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α

Partie D : Pour tout $x \in I$, on pose : $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$

0,5 pt **1 -** Montrer que la fonction F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in I$

0,5 pt **2 - a)** En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[) \;\; ; \;\; F(x) = 2\ln 2 - \left(1 + \tfrac{1}{x}\right)\ln(1+x)$$

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$, puis déduire que : $\int_0^1 f(t)dt = 2\ln 2 - 1$

0,5 pt **c)** Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$

Yassine Elamri

Partie E : On pose, pour tout k de $\mathbb{N}$, $\Delta_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \Delta_k$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que : $(\forall k \in \mathbb{N})$; $0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1)$

0,5 pt **b)** En déduire que : $(\forall k \in \mathbb{N})$; $0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone

0,25 pt **b)** Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente

0,25 pt **c)** Montrer que la limite ℓ de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie : $\frac{3}{2} - 2\ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$

Exercice 2 : (3.5 pts)

Soit m **un complexe non nul** donné et $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

Partie I : On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z, $(E_m) : z^2 + mj^2z + m^2j = 0$

0,5 pt **1 -** Vérifier que : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 1$

0,25 pt **2 - a)** Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta = [m(1-j)]^2$

0,5 pt **b)** Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m)

0,5 pt **3 -** Dans cette question, on suppose que, $m = 1 + i$

Montrer que $(z_1 + z_2)^{2022}$ est un imaginaire pur.

Partie II : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$

Soit φ la transformation du plan complexe qui à tout point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ tel que : $z' = (1+j)z$

0,25 pt **1 -** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application φ

2 - On considère les points A, B et C d'affixes respectives m, mj et mj^2

Et on note $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$ les images respectives des points A, B et C par l'application φ et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[BA']$, $[CB']$ et $[AC']$

0,75 pt **a)** Montrer que : $a' = -mj^2$, $b' = -m$ et $c' = -mj$

0,25 pt **b)** Montrer que : $p + qj + rj^2 = 0$

0,5 pt **c)** En déduire que le triangle PQR est équilatéral.

Exercice 3 : (3 pts)

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1

On considère dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E_n) : $(x+1)^n - x^n = ny$

Soit (x, y) une solution de l'équation (E_n) dans $\mathbb{N}^2$ et soit p le plus petit diviseur premier de n

0,25 pt **1 - a)** Montrer que $(x+1)^n \equiv x^n\ [p]$

0,25 pt **b)** Montrer que p est premier avec x et avec $(x+1)$

Yassine Elamri

Today r than yesterday, tomorrow better than today

0,25 pt **c)** En déduire que : $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1}\ [p]$

0,5 pt **2 -** Montrer que si n est pair, alors l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

3 - On suppose que n est impair

0,5 pt **a)** Montrer qu'il existe un couple (u, v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $nu + (p-1)v = 1$

(On rappelle que p est le plus petit diviseur premier de n)

0,25 pt **b)** Soient q et r respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de u par $(p-1)$. Vérifier que : $nr = 1 - (p-1)(v+nq)$

0,5 pt **c)** On pose : $v' = -(v+nq)$. Montrer que : $v' \geq 0$

0,5 pt **d)** Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

Exercice 4 : (3.5 pts)

té

http

FIN

Today better than yesterday, tomorrow better than today