Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\sin(x)$.

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f''(x) + f(x) = 2\cos(x)$.
2. En déduire la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que : $F(-\pi) = 0$.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par: $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1; (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante puis en déduire qu'elle est convergente.
3. (a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$
   (b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
   (c) Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie par: $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer D_f, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f à gauche de 0 puis interpréter graphiquement ce résultat.
3. (a) Montrer que $f'(x) = \frac{2x-3}{2(x-1)}\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ pour tout x de $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$.
   (b) Donner le tableau de variations de f.
4. Étudier les branches infinies de (C_f).
5. Tracer (C_f).
6. Soit g la restriction de f sur $I = \left]1; \frac{3}{2}\right[$.
   (a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
   (b) Tracer la courbe $(G_{g^{-1}})$ dans le même repère.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today