ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Rattrapage juillet 2009

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte six exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

- Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** ..... **3 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **3 points**
- Exercice 3 : **Caclcul des probabilités** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **suites numériques** ..... **3 points**
- Exercice 5 : **Calcul intégral** ..... **2 points**
- Exercice 6 : **Etude d'une fonction numérique** ..... **6 points**

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

Dans le l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le point $A(2,2,-1)$, le plan (P) d'équation : $2x+y+2z-13=0$ et la sphère (S) de centre le point $\Omega(1,0,1)$ et de rayon 3 .

1 - a) Montrer que : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$ est une équation cartésienne du sphère (S) puis vérifier que $A\in(S)$. **0.75 pt**

b) Calculer la distance du point Ω au plan (P) puis en déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S). **0.75 pt**

2 - Soit (D) la droite passant par le point A et perpendiculaire au plan (P) .

a) Montrer que : $\vec{u}(2,1,2)$ est un vecteur directeur de la droite (D) et que : $(6,-6,-3)$ est le triple de cordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}$ **0.75 pt**

b) $\dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\overrightarrow{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$ puis en déduire que la droite (D) est tangente à la sphère (S) en A . **0.75 pt**

Exercice 2 : (3 pts)

1 - Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : **1 pt**

$$z^2-6z+25=0$$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les A, B , C et D d'affixes respectives :

$$a=3+4i\ ,\ b=3-4i,\ c=2+3i \text{ et } d=5+6i$$

.

a) Calculer $\dfrac{d-c}{a-c}$ puis en déduire que les points A, C et D sont colinéaires. **0.5 pt**

b) Montrer que le nombre $p=3+8i$ est l'affixe du point P image du point A par l'homothétie h de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$. **0.5 pt**

c) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\dfrac{d-p}{a-p}$ puis en déduire que $\frac{\pi}{4}$ est une mesure de l'ongle $\left(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}}\right)$ et que $PA=\sqrt{2}PD$. **1 pt**

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient 7 boules noires et deux boules blanches(les boules sont indiscernables au toucher)
On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches restantes dans l'urne après le tirage des deux boules.

1 - Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X. **0.5 pt**

2 - Montrer que : $P(X=0)=\dfrac{1}{36}$ et $P(X=1)=\dfrac{7}{18}$. **1.5 pt**

3 - Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$. **1 pt**

Yassine Elamri

Exercice 4 : (3 pts)

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+4u_n}{7-2u_n} \end{cases}$$

1 - Vérifier que : $1 - u_{n+1} = \dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$, pour tout n de $\mathbb{N}$ et montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1-u_n > 0$. **1 pt**

2 - On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n - 1}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$ puis exprimer v_n en fonction de n. **1 pt**

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$$

puis en déduire la limite de la suite (u_n). **1 pt**

Exercice 5 : (2 pts)

1 - Déterminer les fonctions primitives de la fonction : $x \longrightarrow 2x\left(x^2-1\right)^{2009}$ sur $\mathbb{R}$ et vérifier que : **1 pt**

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2x\left(x^2-1\right)^{2009}\, dx = \frac{1}{2010}$$

2 - En utilisant l'intégration par parties, montrer que : **1 pt**

$$\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)\, dx = 6\ln 3 - 2$$

Exercice 6 : (6 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$$

et soit (C) la courbe représentative de la f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 - a) Vérifier que : $f(x) = x\left(\dfrac{1-e^{-2x}}{e^{-2x}+1}\right)$, pour tout x de $\mathbb{R}$. **0.5 pt**

b) Montrer que la fonction f est paire et que : **1 pt**

$$f(x) - x = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

c) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 0$ puis en déduire que la droite (D) d'équation $y = x$ est un asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$. **1 pt**

https://steinmath.com yesterday, tomorrow better than today

Yassine Elamri

0.5 pt **2 -** Montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

1 pt **3 - a)** Montrer que : $f'(x) = \dfrac{e^{4x} - 1 + 4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ pour tout réel x et vérifier que $f'(0) = 0$.

b) Montrer que : $e^{4x} - 1 \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$ puis en déduire que

0.5 pt $e^{4x} - 1 + 4xe^{2x} \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$.

0.5 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

4 - Construire la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(On admet que la courbe (C) possède deux points d'inflexion que l'on ne demande pas de

1 pt préciser).

Yassine Elamri

FIN