ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Rattrapage juillet 2010

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte cinq exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

- Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** ..... **3 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **3 points**
- Exercice 3 : **Caclcul des probabilités** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **suites numériques** ..... **3 points**
- Exercice 5 : **Etude d'une fonction numérique et calcul intégral** ..... **8 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points $A(0,-2,0)$, $B(1,1,-4)$ et $C(0,1,-4)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$.

0.5 pt **1 -** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,2,3)$ et son rayon est 5.

2 - a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$ puis en déduire que $4y+3z+8=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC). **1 pt**

0.5 pt **b)** Calculer $d(\Omega,(ABC))$ puis en déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

3 - Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Démontrer que : $\begin{cases}x=1\\y=2+4t\\z=3+3t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ). **0.5 pt**

b) Démontrer que le triple des coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (ABC) est $(1,-2,0)$. **0.25 pt**

0.25 pt **c)** Vérifier que H est le point de contact du plan (ABC) et la sphère (S).

Exercice 2 : (3 pts)

1 - Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2-8\sqrt{3}z+64=0$$ **1 pt**

2 - On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives : $a=8i$, $b=4\sqrt{3}-4i$ et $c=2\left(4\sqrt{3}+4i\right)$.

Soient z l'affixe du point M et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'ongle $\dfrac{4\pi}{3}$.

0.5 pt **a)** Montrer que $z'=\left(-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.

0.25 pt **b)** Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R.

c) Montrer que : $\dfrac{a-b}{c-b}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ puis écrire le nombre $\dfrac{a-b}{c-b}$ sous forme trigonométrique. **0.75 pt**

0.5 pt **d)** En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient huit boules portées les nombres suivants :

① , ① , ① , ② , ② , ② , ③ , ③

(les boules sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

Yassine Elamri

1 - Soient A et B deux événement tels que :

A : " tirer deux boules portant le nombre 2"

B : "tirer deux boules dont une au moins porte le nombre 3 "

1.25 pt Montrer que $P(A) = \dfrac{3}{28}$ et que $P(B) = \dfrac{13}{28}$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules portant un nombre impair.

0.25 pt **a)** Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

0.75 pt **b)** Montrer que : $P(X = 1) = \dfrac{15}{28}$.

0.75 pt **c)** Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 4 : (3 pts)

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{21 + u_n} \end{cases}$$

0.5 pt **1 -** Montrer que : $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **2 -** Montrer que : $u_{n+1} < \dfrac{1}{7}u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **3 -** Montrer que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

0.75 pt **4 - a)** Montrer par récurrence que : $u_n < \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

0.5 pt **b)** Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 5 : (8 pts)

I) On considère la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3.$$

1 - a) Vérifier que :

0.25 pt $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$

0.5 pt **b)** Montrer que : $g'(x) = \dfrac{(x-1)\left(3x^2 + 3x + 2\right)}{x}$. pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$.

0.25 pt **2 - a)** Vérifier que : $\dfrac{3x^2 + 3x + 2}{x} > 0$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$.

0.5 pt **b)** En déduire que le signe de $g'(x)$ est celui de $x - 1$ sur $]0, +\infty[$.

3 - a) Montrer que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0, 1]$ et croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$. **0.5 pt**

b) En déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$

(remarquer que : $g(1) > 0$). **0.5 pt**

II) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

Yassine Elamri

$$f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (On prendra $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 1cm$)

1 - Montrer que : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$, puis en déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. **1 pt**

2 - a) Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement. **0.5 pt**

b) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 1 + lnx}{x^2} = 0$ et que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(On rappel que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{lnx}{x^2} = 0$) **0.75 pt**

c) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$. **0.5 pt**

3 - Montrer que $y = 3(x-1)$ est une équation de la droite tangente à la courbe (C) au point de coordonnées $(1, 0)$ **0.5 pt**

4 - Construire la droite (Δ) et la courbe (C) (on admettra que la courbe (C) possède un point d'inflexion uniquedont on ne demande pas de déterminer). **0.75 pt**

5 - a) En utilisant l'intégration par partie, montrer que

$$\int_1^e \frac{lnx}{x^2}\, dx = 1 - \frac{e}{2} \quad \text{(Poser : } u'(x) = \tfrac{1}{x^2} \text{ et } v(x) = lnx\text{).}$$

1 pt

b) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , la droite (Δ) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est égale àn : $\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) cm^2$. **0.5 pt**

FIN

Yassine Elamri