ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences & Technologies

Session : Rattrapage juin 2011

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences & Technologies**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Équations et inéquations** ..... **2.5 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **4 points**
- Exercice 3 : **Suites numériques** ..... **3.5 points**
- Exercice 4 : **Étude d'une fonction numérique et calcul intégral** ..... **10 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ **ln** désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (2.5 pts)

0.5 pt **1 - a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 2x - 3 = 0$

1 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^x - \dfrac{3}{e^x} - 2 = 0$

1 pt **2 -** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{x+1} - e^{-x} \geq 0$

Exercice 2 : (3.5 pts)

1 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 18 = 0$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les deux points A et B ayant respectivement les affixes : $a = 3 + 3i$ et $b = 3 - 3i$

0.5 pt **a)** Écrire sous la forme trigonométrique les deux nombres a et b

0.75 pt **b)** Montrer que b' l'affixe du B' l'image de B par translation qui a le vecteur $\overrightarrow{OA}$ est 6

1 pt **c)** Montrer que : $\dfrac{b - b'}{a - b'} = i$ puis déduire que le triangle $AB'B$ est isocèle et rectangle en B'

0.75 pt **d)** Déduire d'après ce qui précède que le quadrilatère $OAB'B$ est un carré

Exercice 3 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{6u_n}{1 + 15u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$

0.5 pt **b)** Montrer par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_n > \dfrac{1}{3}$

2 - On considère la suite numérique (v_n) définie par, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $v_n = 1 - \dfrac{1}{3u_n}$

1.5 pt Montrer que : (v_n) est une suite géométrique son raison $\dfrac{1}{6}$ puis écrire v_n en fonction de n

1 pt **3 -** Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$ puis déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 4 : (3.5 pts)

I : On considère la fonction numérique g définie sur $I =]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln x$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que pour tout $x \in I$: $g'(x) = \dfrac{x + 1}{x}$

0.5 pt **b)** Montrer que la fonction g est croissante sur I

2 - Déduire que : $g(x) \geq 0$ sur $[1, +\infty[$ et que $g(x) \leq 0$ sur $]0, 1]$ (remarquer que $g(1) = 0$)

1 pt

Yassine Elamri

Toda n yesterday, tomorrow better than today

II : Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)\ln x$

et Soit (C) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$(l'unité 1 cm)

0.75 pt **1 - a)** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ (remarquer que pour tout x de I : $\dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)\dfrac{\ln x}{x}$) **1 pt**

c) Déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ qu'on détermine sa direction **0.5 pt**

1 pt **2 - a)** Montrer que pour tout $x \in I$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

0.5 pt **b)** Déduire que f est croissante sur $[1, +\infty[$ et décroissante sur $]0, 1]$

0.25 pt **c)** Donner le tableau de variation de f sur I

3 - Tracer (C)(On admettera que la courbe (C)posssède un seul point d'inflexion d'abscisse compris entre 1.5 et 2) **1 pt**

4 - a) Montrer que : $H : x \longrightarrow \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de $h : x \longrightarrow \dfrac{\ln x}{x}$ sur l'intervalle I

0.5 pt **b)** Montrer que : $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}$

0.75 pt **c)** On utilisant l'intégration par partie, montrer que : $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx = \frac{1}{2}$

1 pt **5 - a)** Vérifier que pour tout $x \in I$: $f(x) = \ln x - \dfrac{\ln x}{x}$

1 pt **b)** Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les deux droite d'équations $x = 1$ et $x = e$ est $0.5cm^2$

FIN

Yassine Elamri