ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Normal juin 2011

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences et technologies**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

- Exercice 1 : **Équations et inéquations** ..... **2.5 points**
- Exercice 2 : **suites numériques** ..... **3 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** ..... **5 points**
- Exercice 4 : **Etude d'une fonction numérique et calcul intégral** .... **9.5 points**

Yassine Elamri

Exercice 1 : (2.5 pts)

0,5 pt **1 - a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + 4x - 5 = 0$.

1 pt **b)** Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'équation : $\ln\left(x^2+5\right) = \ln(x+2) + \ln(2x)$

1 pt **2 -** Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'inéquation : $\ln x + \ln(x+1) \geq \ln\left(x^2+1\right)$

Exercice 2 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{5+8u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 -** Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - On pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1,5 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 5 puis exprimer v_n en fonction de n.

1 pt **b)** Montrer que $u_n = \dfrac{1}{3\times 5^n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 : (5 pts)

1 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 18z + 82 = 0$$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 9+i \quad , \quad b = 9-i \quad \text{et} \quad c = 11-i.$$

1 pt **a)** Montrer que $\dfrac{c-b}{a-b} = -i$ puis en déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

0,5 pt **b)** Donner une forme trigonométrique du nombre complexe $4(1-i)$.

1 pt **c)** Montrer que : $(c-a)(c-b) = 4(1-i)$ puis en déduire que : $AC \times BC = 4\sqrt{2}$.

1,5 pt **d)** Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre B et d'angle $\dfrac{3\pi}{2}$.

Montrer que : $z' = -iz + 10 + 8i$ puis vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $9-3i$.

Yassine Elamri

Exercice 4 : (9.5 pts)

Partie A : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1-x)e^x - 1$.

0, pt **1 - a)** Montrer que : $g'(x) = -xe^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction g est décroissante sur $[0;+\infty[$ et croissante sur $]-\infty;0]$ et vérifier que $g(0) = 0$ — 0,75 pt

0,5 pt **2 -** En déduire que : $g(x) \leq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Partie B : Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2-x)e^x - x$. et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : **1 cm**).

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ puis en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera la direction. — 0,75 pt

0,75 pt **2 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]$.
(on rappelle que : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$).

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$. — 0,25 pt

0,5 pt **3 - a)** Montrer que : $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0,25 pt **b)** Interpréter géométriquement le résultat : $f'(0) = 0$

c) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f. — 0,5 pt

4 - Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\dfrac{3}{2} < \alpha < 2$ (on admettra que $e^{\frac{3}{2}} > 3$). — 0,5 pt

5 - a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) + x = 0$ et en déduire que (C) et (D) se coupent au point $A(2;-2)$. — 0,5 pt

0,25 pt **b)** Étudier le signe de $f(x) + x$ sur $\mathbb{R}$.

0,25 pt **c)** En déduire que (C) est au-dessus de (D) sur $]-\infty;2[$ et en-dessous de (D) sur $]2;+\infty[$.

0,5 pt **6 - a)** Montrer que la courbe (C) possède un point d'inflexion unique de coordonnées $(0;2)$.

1 pt **b)** Construire la droite (D) et la courbe (C) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 pt **7 - a)** Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\int_{-1}^{0} (2-x)e^x dx = 3 - \frac{4}{e}.$$

b) En déduire, en $\mathbf{cm^2}$, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$. — 0,25 pt

FIN

Yassine Elamri