ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences expérimentales

Session : rattrapage juillet 2013

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

✓ Certaines notations sont utilisées dans différents exercices, toutefois chaque notation ne concerne que l'exercice où elle est utilisée et ne dépend ni des exercices précédents ni des exercices suivants .

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** ..... **3 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **3 points**
- Exercice 3 : **Suite numériques** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **Calcul des probabilités** ..... **3 points**
- Exercice 5 : **Étude d'une fonction numérique et calcul intégral** ..... **8 points**

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

On considère, dans L'espace rapporté d un repère orthonormé direct $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$. les points $A(0,0,1), B(1,1,1)$ et $C(2,1,2)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1,-1,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

1 - Montrer que $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$ est une équation cartésienne de la sphère et verifier que le point A appartient à la sphère (S). **0,75 pt**

2 - a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ et en déduire que $x-y-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC). **0,75 pt**

b) Calculer $d(\Omega,(ABC))$ puis en déduire que le plan (ABC) est tangent a la sphère (S) en A. **0,75 pt**

3 - Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Démontrer que $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t\ (t\in\mathbb{R}) \\ z=-t \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) . **0,25 pt**

b) En déduire les coordonnées des deux points d'intersections de la droite (Δ) et la sphère (S) **0,5 pt**

Exercice 2 : (3 pts)

1 - Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes C, l'équation :

$$z^2-8z+25=0.$$

0,75 pt

2 - On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tels que :

$$a=4+3i, b=4-3i \text{ et } c=10+3i$$

et la translation T de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

a) Montrer que l'affixe du point D image du point A par la translation T est $d=10+9i$. **0,75 pt**

b) Vérifier que $\dfrac{b-a}{d-a}=-\dfrac{1}{2}(1+i)$ puis écrire le nombre complexe $-\dfrac{1}{2}(1+i)$ sous une forme trigonométrique **1 pt**

c) Montrer que : $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})=\dfrac{5\pi}{4}[2\pi]$. **0,5 pt**

Exercice 3 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{5}u_n+\dfrac{4}{5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 - Vérifier que : $u_{n+1}-1=\dfrac{1}{5}(u_n-1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$. **0,5 pt**

2 - a) Montrer par récurrence que $u_n>1$ pour tout n de $\mathbb{N}$. **0,5 pt**

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

0,5 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

0,25 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3 - Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n$-1 pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et exprimer v_n en fonction de n

0,75 pt **b)** En déduire que $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 : (3 pts)

Un sac contient 9 jetons indiscernables au toucher : *quatre* jetons blancs, *trois* jetons noirs et *deux* jetons verts

On tire au hasard, simultanément, *trois* jetons du sac

1 - Soient les deux événements suivants

A : " Tirer trois jetons de même couleur "

B : " Tirer trois jetons de couleurs différentes deux à deux "

1 pt Montrer que $p(A) = \frac{5}{84}$ et que $p(B) = \frac{2}{7}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de jetons noirs tirés.

0.25 pt **a)** Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1, 2 et 3.

1 pt **b)** Montrer que $p(X = 2) = \frac{3}{14}$ et $p(X = 1) = \frac{15}{28}$

0.75 pt **c)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 5 : (8 pts)

Partie I : On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - x - \ln x$

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que $2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

1 pt **b)** Montrer que $g'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$ et en déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle]0,1] et qu'elle est croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

0.5 pt **2 -** Montrer que $g(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$. (remarquer que $g(1) = 0$).

Partie II : On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 1 - (\ln x)^2.$$

et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$(unité 1 cm).

0.5 pt **1 - a)** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

0.5 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

(remarquer que $f(x) = x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$).

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

c) En déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction. **0.25 pt**

2 - a) Montrer que : $f'(x) = 2\left(\dfrac{x^2 - \ln x}{x}\right)$ pour tout x de $]0, +\infty[$. **1pt**

b) Vérifier que $\dfrac{g(x)}{x} + 1 = \dfrac{x^2 - \ln x}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$ et en déduire que la fonction f est croissante sur $]0, +\infty[$. **0.75 pt**

3 - a) Montrer que $y = 2x - 2$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point $A(1, 0)$. **0.5 pt**

b) Construire, dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C). (on admettra que A est le seul point d'inflexion de la courbe (C)) **0.75 pt**

4 - a) Vérifier que $H : x \mapsto x(\ln x - 1)$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$ puis montrer que : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \mathrm{d}x = 1$. **0.75 pt**

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2$ **0.5 pt**

c) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est égale $\grave{a}$ $\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^3 - 6\mathrm{e} + 8)\,\mathrm{cm}^2$ **0.5 pt**

FIN

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today