Exercice 1

Ces questions sont indépendantes)

1 Soit $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2+6x}-3}{x-3} & , x \neq 3 \\ f(3) = 12 \end{cases}$ $x_0 = 3$;étudier la continuité de la fonction f au point x_0.

2 Calculer la limite : $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^2-4}$.

3 Montrer que : $\frac{\sqrt[6]{81}\times 2^{\frac{1}{3}}\times \sqrt[6]{36}}{2^{\frac{2}{3}}\times 3} = 1$

1 Etudier la dérivabilité de la fonction $f$puis calculer la fonction dérivée dans chacun des cas suivants:

(a) $f(x) = \left(x^3+x\right)^8$

(b) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

(c) $f(x) = \cos\left(\sqrt{x^4+2}\right)$

(d) $f(x) = \sqrt[4]{x^2-x}$

Exercice 2

1 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

(a) Déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donner le tableau de variations de la fonction g.

(b) Montrer que : $(\forall x \in]-\infty;1]; g(x) < 0)$

(c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que : $1 < \alpha < 2$

(d) Donner une approximation du nombre α sur $]1;2[$ à la précision 0.25.

(e) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$, (Résumer le signe de g dans un tableau).

2 Soit f la fonction définie sur : $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$

(a) Déterminer $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

(b) Montrer que : $\forall x \in]-1;+\infty\left[; f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}\right.$

(c) Donner le tableau de variations de la fonction f sur $]-1;+\infty[$

(d) Montrer que : $f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3(1+\alpha^2)}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$

1 Montrer que : $D_f = [1;+\infty[$.

2 Montrer que : $\forall x \in [1;+\infty[: f(x) > 0$

Yassine Elamri

3 Déterminer: $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $[1;+\infty[$, en déduire que f est décroissante sur $[1;+\infty[$

4 Montrer que : $\forall x \in \left[1;+\infty\right[: \sqrt{x}-\sqrt{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$

5 (a) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J qu'elle faut déterminera.

(b) Calculer $f(4)$ en déduire que f^{-1} est dérivable en $2-\sqrt{3}$ et déterminer $\left(f^{-1}\right)'(2-\sqrt{3})$.

6 Montrer que : $\forall x \in J : f^{-1}(x) = \frac{x^4+2x^2+1}{4x^2}$.

Yassine Elamri