La pyramide et le cône de révolution

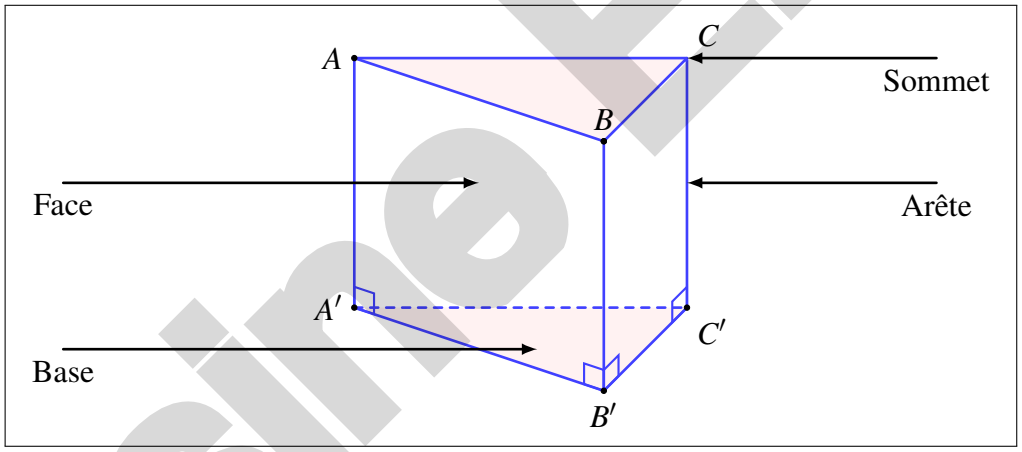
I Le prisme droit

1 Définition

Définition

Un prisme droit est un solide constitué de deux faces identiques parallèles entre elles de forme polygonale (triangle, rectangle, carrée, pentagone,...) qui constituent les bases du prisme.
Il est également constitué de faces latérales rectangulaires toutes perpendiculaires aux bases

✿ Figure géométrique :



$ABCA'B'C'$ est un prisme droit à base triangulaire et on a $AA' = BB' = CC'$ (AA' est la hauteur du prisme)

EXEMPLES

✸ Le parallélépipède est un prisme droit à bases rectangulaires
✸ Le cube est un prisme droit à bases carrés

2 Aire latérale

L'aire latérale d'un prisme droit est égale au produit du périmètre (p) de l'une de ses bases et sa hauteur (h)

$$A = p \times h$$

Yassine Elamri

3 Volume

Le volume v d'un prisme droit est égale au produit de l'aire (S) de l'une de ses bases et sa hauteur (h)

$$v = S \times h$$

• Exemple

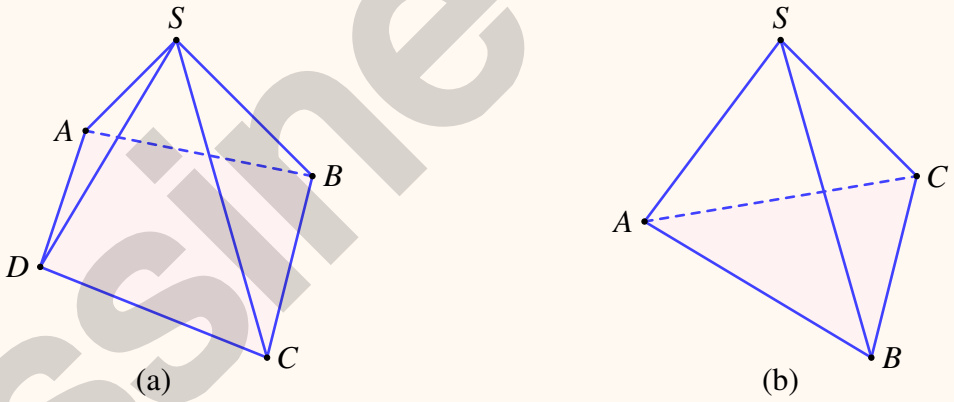
On considère un prisme droit dont le périmètre de la base est $28cm$ et l'aire de la bse est $13cm^2$ et de hauteur $5cm$

- L'aire latérales est : $A = p \times h = 28 \times 5 = 140cm^2$
- Le volume du prisme est : $v = S \times h = 13 \times 5 = 80cm^3$

II La pyramide

Activité

On considère les deux solides suivants :



1. Quelle est la nature de ces deux solides ? et quelle est la forme de leurs bases ?
2. Mentionnez les faces et les arêtes latérales de chaque solide, puis déterminez leur forme et leur nombre ?
3. Lister les sommets de chaque solide, puis déterminer leur nombre ?
4. Lister toutes les faces qui contiennent le sommet S dans chaque solide ?
5. Nommez tous les faces qui contiennent l'arête $[SA]$ dans les deux solides ?

Définition

Une pyramide est un solide ayant :

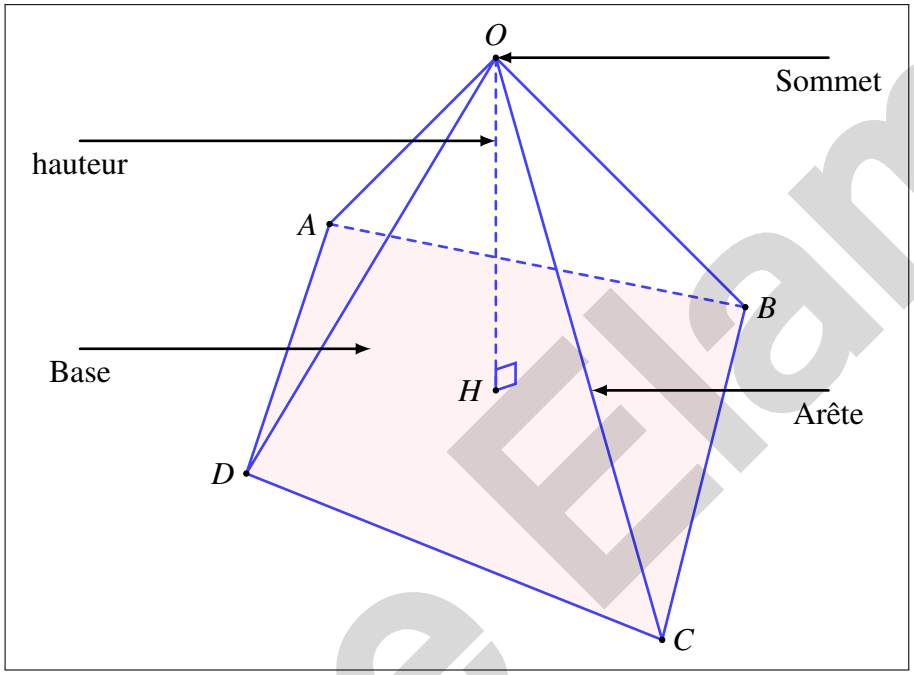
- Une face polygonale appelée base
- Toutes les autres faces sont des triangles qui ont un sommet commun et sont appelés faces

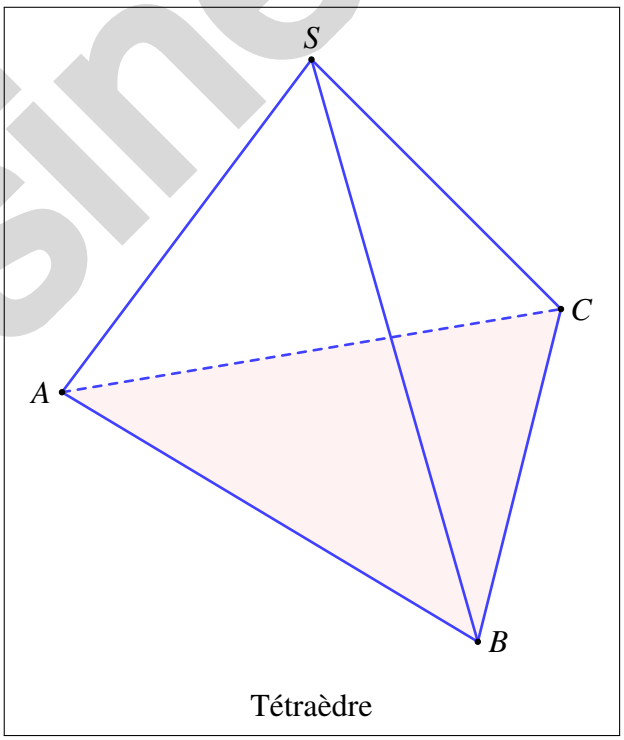
Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

latérales
➽ Si la base est aussi triangulaire, alors cette pyramide est appelée tétraèdre

✿ Figure géométrique :



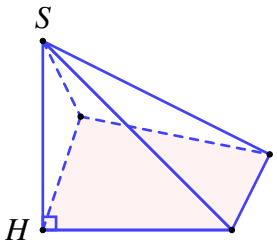


Tétraèdre

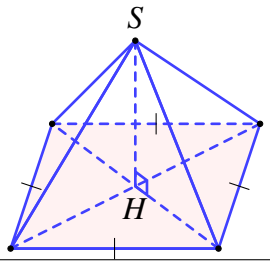
✿ **Cas particuliers :**

Yassine Elamri

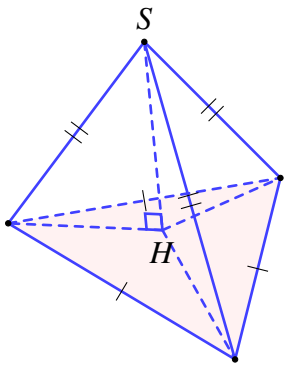
Today better than yesterday, tomorrow better than today



La pyramide dont la hauteur est une arrête
H est un sommet de la base



La pyramide régulière à base carrée
H est le centre de la base



Le tétraèdre dont la base est un triangle équilatéral
H est le centre du cercle circonscrit de ce triangle

Tétraèdre

✸ Une pyramide régulière est une pyramide dont toutes les faces sont des triangles isocèles super-

1 Le patron

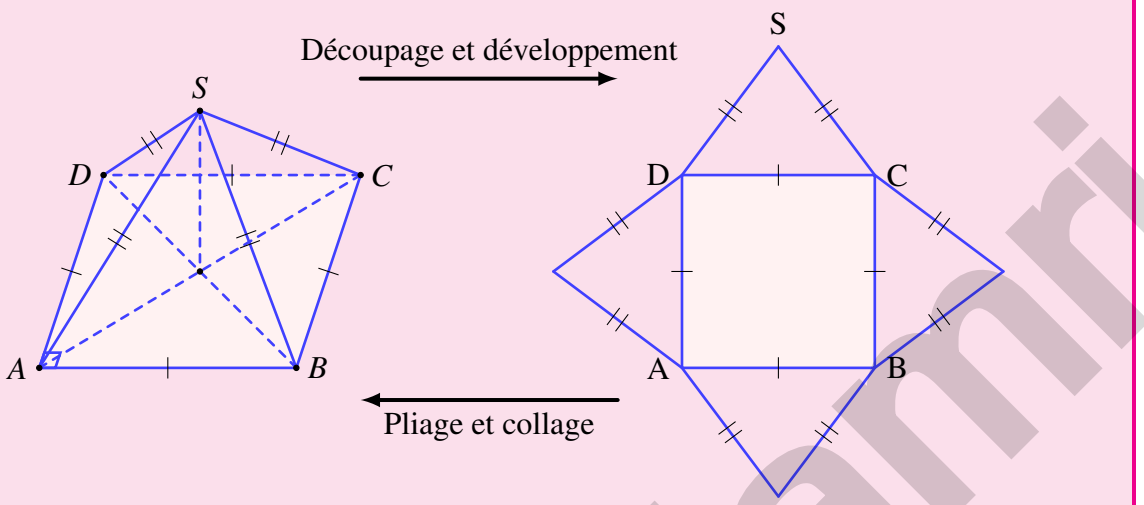
✪ Un patron est une surface plane, qui, par pliage, doit permettre de retrouver le solide sans vide ni superposition
✪ Le patron d'une pyramide se compose du polygone de base et des faces latérales qui sont des triangles
✪ On déplie la pyramide et on obtient le patron

EXEMPLES

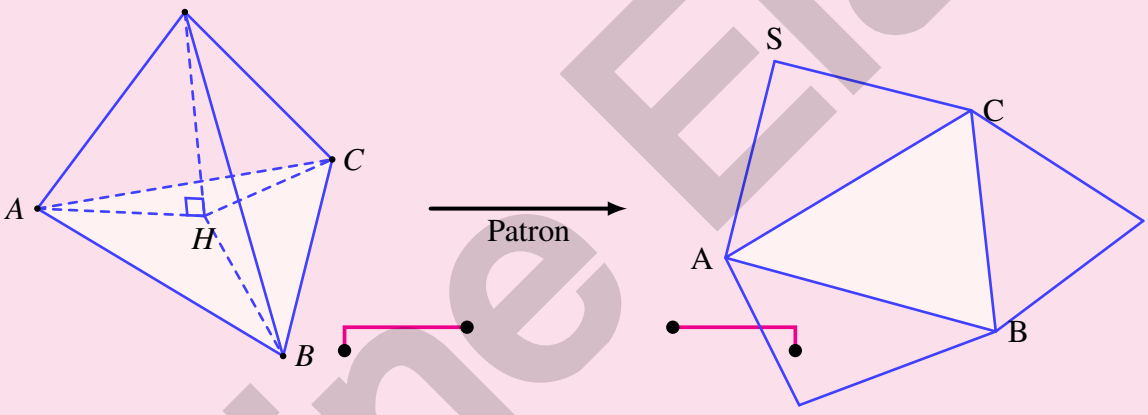
❶ Pyramide régulière à base carrée

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today



❷ Pyramide régulière à base triangulaire



Remarque

Une pyramide a plusieurs patrons possibles

Mèthode

Quelque soit la pyramide, le patron son construit de la manière suivante :
❀ On trace d'abord la base en grandeur réelle
❀ On construit chaque face latérale (triangle) au compas

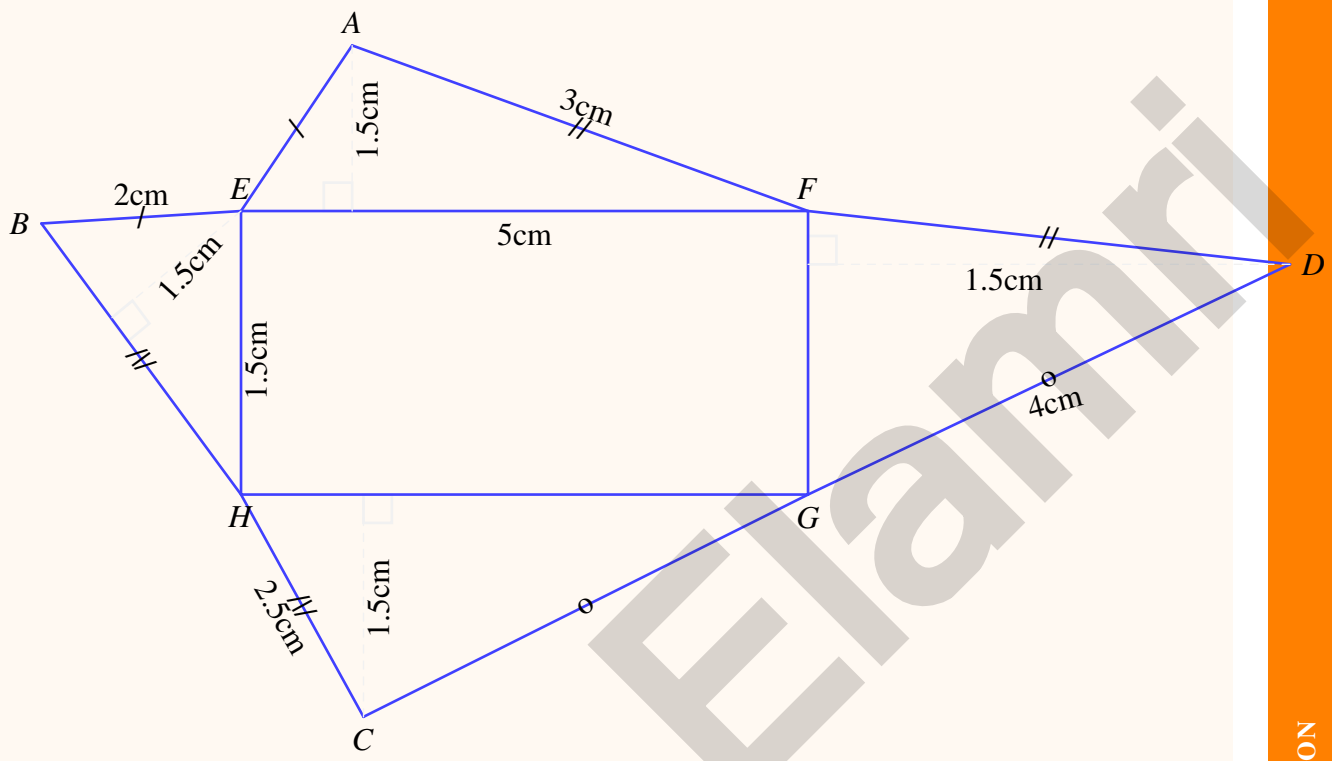
2 L'aire et le volume d'une pyramide

Activité

La figure suivante représente un dépliage d'une pyramide à base rectangulaire

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today



1. Calculer le périmètre de cette forme
2. Calculer l'aire des triangles BEH, AEF, FDG et GCH
3. Calculer l'aire du rectangle $EFGH$
4. Déduire l'aire totale de cette forme

a L'aire latérale d'une pyramide

L'aire latérale d'une pyramide est la somme des aires de toutes les faces latérales

b Le volume d'une pyramide

Le volume V d'une pyramide est égale au tiers du produit de l'aire A de la base du solide et la hauteur h

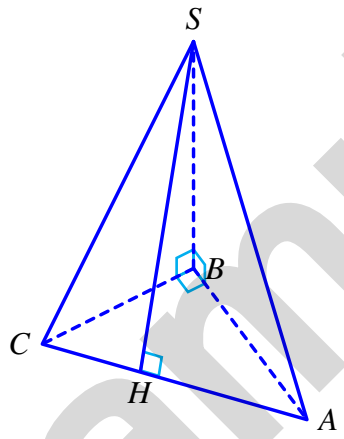
$$V = \frac{1}{3} \times A \times h$$

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

Soit $SABC$ une pyramide dont la base est le triangle ABC rectangle en B
Les triangles SAB et SBC sont rectangles en B et on a : $AB = 4$, $BC = 3$, $AC = 5$, $SB = 6$, et $SH = 3.4$ sachant que SH est une hauteur dans le triangle SAC (voir la figure ci-contre)
Calculer le volume V de cette pyramide



Solution

↦ L'aire latérale A de la pyramide est :

$$\begin{aligned} A &= A_{SAB} + A_{SAC} + A_{SBC} \\ &= \frac{SB \times AB}{2} + \frac{SH \times AC}{2} + \frac{SB \times BC}{2} \\ &= \frac{(6 \times 4) + (3.4 \times 5) + (6 \times 3)}{2} \\ &= \frac{24 + 17 + 18}{2} \\ &= \frac{59}{2} \\ &= 29.5cm^2 \end{aligned}$$

↦ Le volume V de la pyramide est :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times A_{ABC} \times SH \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{BA \times BC}{2} \times SH \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{4 \times 3}{2} \times SH \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{12}{2} \times SH \\ &= \frac{1}{3} \times 6 \times 3.4 \\ &= \frac{20.4}{6} \\ &= 6.8cm^3 \end{aligned}$$

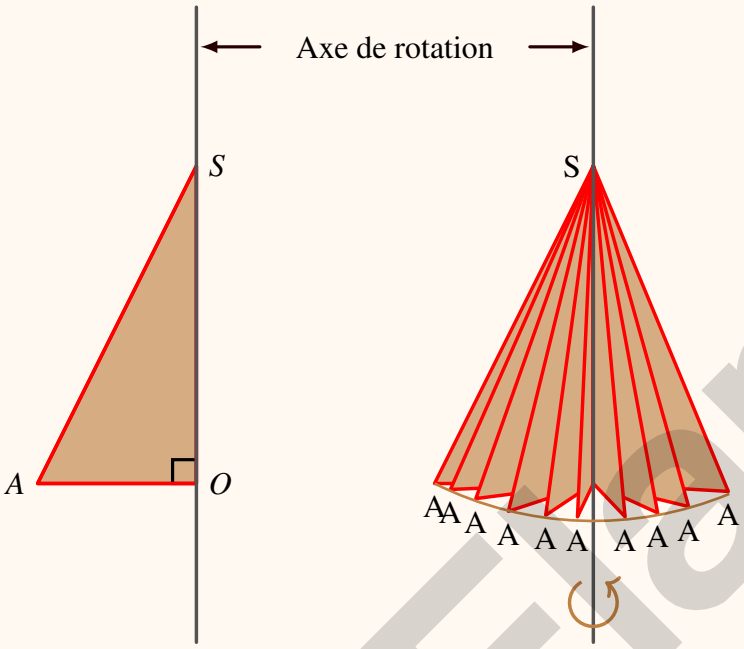
III Cône de révolution

Activité

On considère un équerre shématisé par la triangle ASO rectangle en O tel que : $OA = 8.5$ et $AS = 17$ On fait tourner l'équerre autour de l'axe porté par le coté $[OS]$ de façon que le point O reste fixe

Yassine Flamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today



Le solide obtenu est appelé cône de révolution de sommet S, de hauteur $[OS]$ et de génératrice l'hypoténuse$[AS]$

1. Quelle figure géométrique décrit le point A au cours de cette rotation de l'équerre ? Donner ses éléments caractéristiques
2. Calculer la longueur OS de la hauteur de ce cône de révolution
3. Mentionnez quelques exemples de boites en forme de cône dans votre entourage

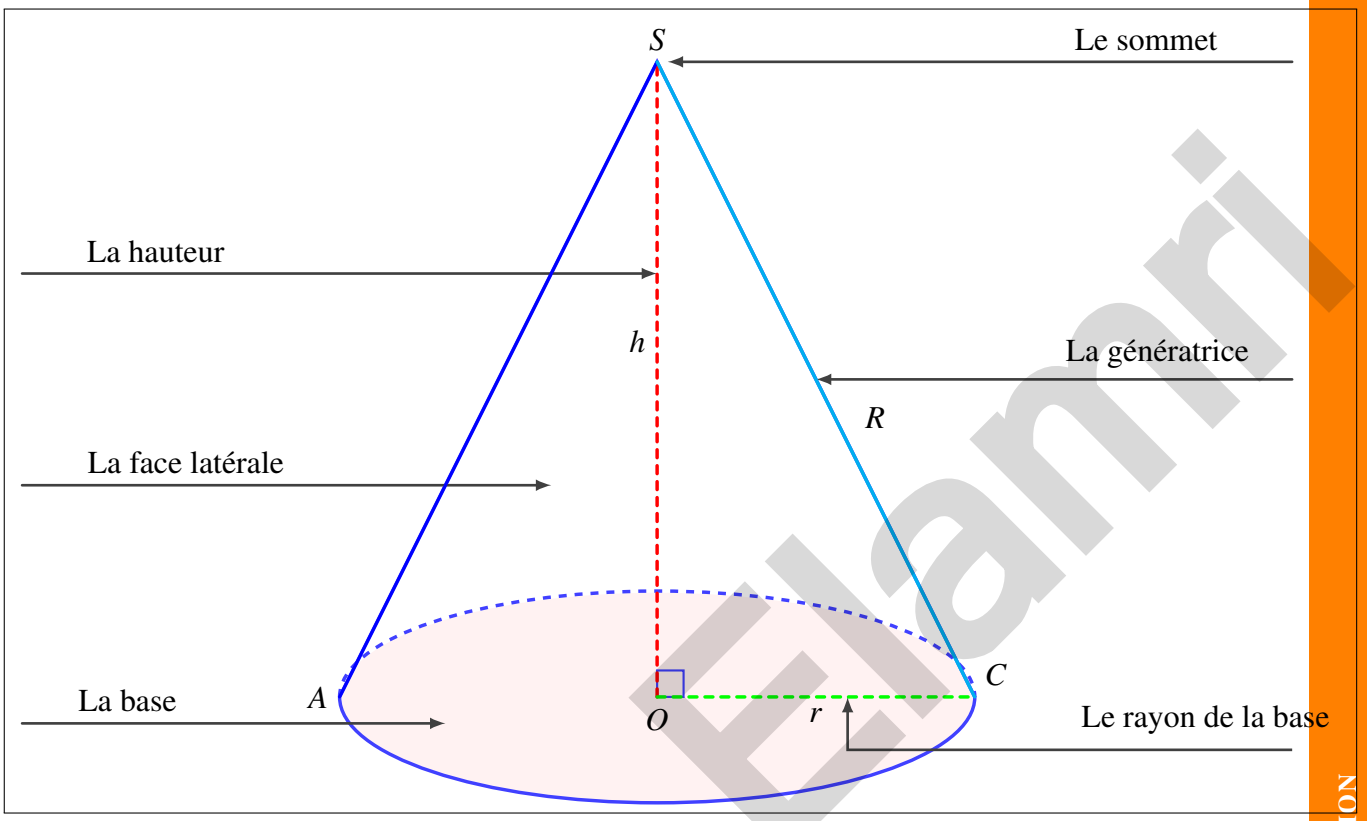
Définition

Un cône de révolution est un solide obtenu en faisant tourner un triangle rectangle autour d'un coté de l'angle droit
Il est constitué :
- D'un disque appelé la base du cône
- D'une surface courbe appelée la face latérale qui entoure le disque de la base

✿ Figure géométrique :

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today



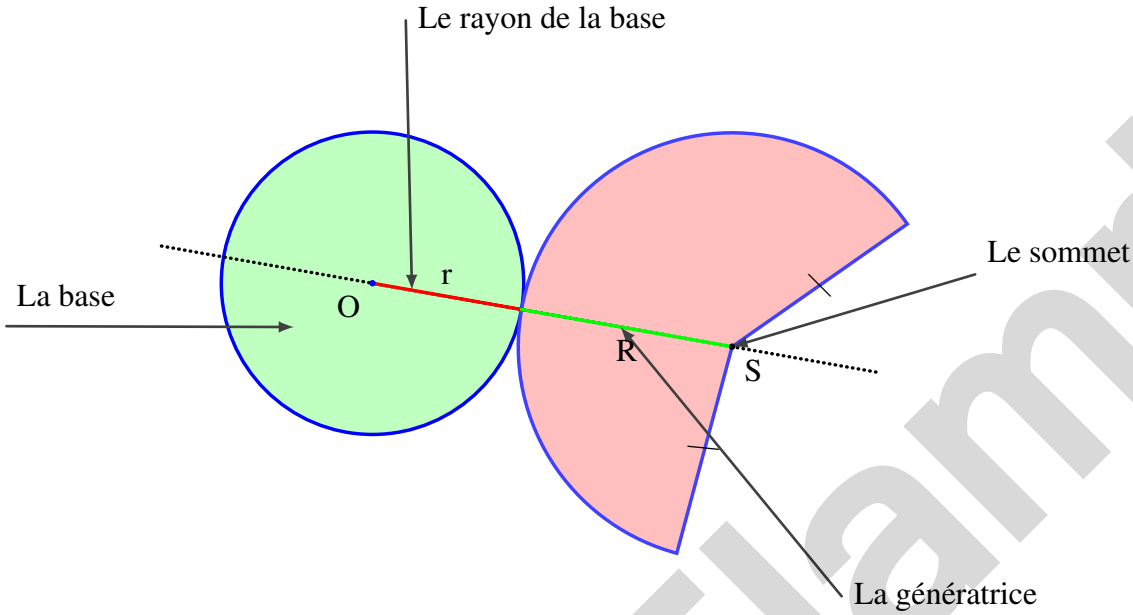
☆ r : Le rayon de la base (cercle de centre O)
☆ R : La génératrice du cône (rayon du cercle de centre S)
☆ $h = OS$: La hauteur du cône (passe par le sommet S et le centre O du cercle de la base)
➻ On peut appliquer le théorème de Pythagore au triangle OSC aui est rectangle en O

1 Le patron

Le patron d'un cône de révolution est constitué du disque de la base, et de la surface latérale qui est représentée par un secteur angulaire
e patron d'un cône de révolution n'est pas si simple à réaliser

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today



Mèthode

Quelque soit le cône de révolution, le patron se construit de la manière suivante :
❀ Il faut connaître au minimum la rayon du disque de la base et le rayon d'une génératrice
❀ On construire la face latérale courbe en calculant la mesure de l'angle au sommet S (proportionnalité, voir l'exemple ci-aprés)
❀ Placer un point H tel que HS soit égale à la somme de la longueur d'une génératrice et du rayon du disque de la base
❀ Construire la base

Règle

☆ $2\pi R$: Périmètre du cercle complet de la face latérale
☆ $2\pi r$: Périmètre du disque de la base

$2\pi R$	$2\pi r$
$360°$	α

$$\alpha = \frac{360° \times \cancel{2\pi} r}{\cancel{2\pi} R} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{r}{R} \times 360°$$

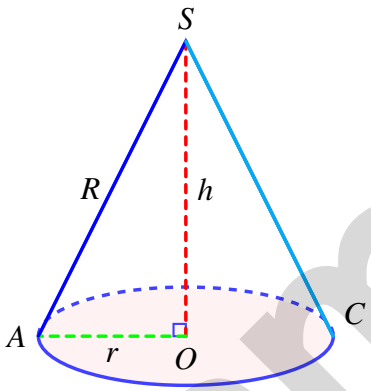
$$\text{angle du secteur angulaire} = \frac{\text{petit rayon}}{\text{grand rayon}} \times 360°$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

Comment peut-on construire un cône de révolution de rayon de base $3cm$ et de hauteur $4cm$



Solution

✪ Calculons d'abord la génératrice R

On a AOS est un triangle rectangle en O, donc, d'après le théorème de Pythagore direct, on a :

$AS^2 = OA^2 + OS^2$

Donc $AS^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

Donc $AS = \sqrt{25} = 5$

Alors $\boxed{R = AS = 5cm}$

✪ Calculons l'angle au sommet α

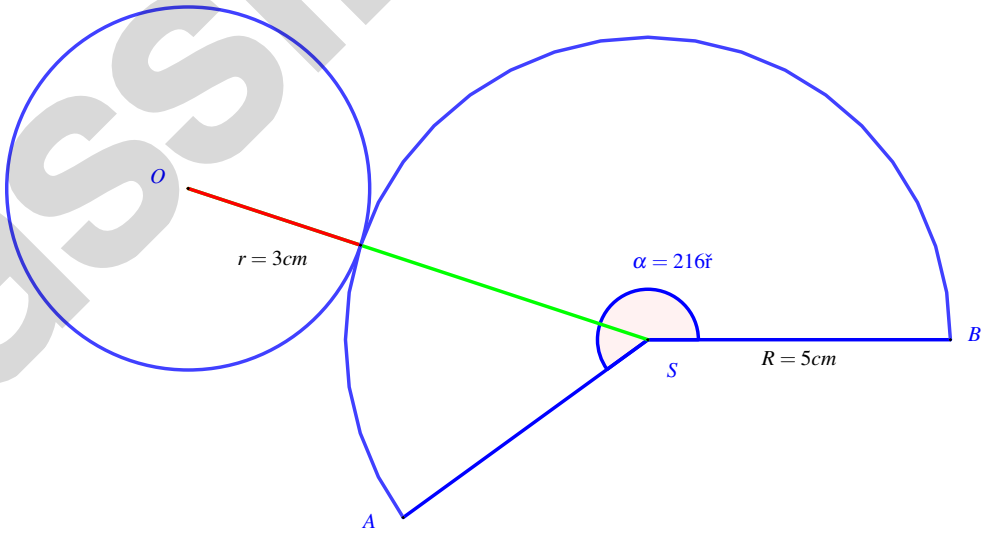
Donc l'angle au sommet S est : $\alpha = \frac{r}{R} \times 360° = \frac{3}{5} \times 360°$

Alors $\boxed{\alpha = 216°}$

✪ On trace, alors, un arc de cercle de centre S, de rayon $R = 5cm$ et d'angle $\alpha = 216°$

✪ On place un point O à $R + r = 5 + 3 = 8cm$ du point S

✪ On complète le patron en traçant le cercle de centre O et de rayon $r = 3cm$



Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 L'aire latérale

πR^2	A
$360°$	α

Avec $\alpha = \frac{r}{R} \times 360°$
Et $\pi \approx 3.14$

$$A = \frac{\alpha \times \pi R^2}{360°} = \frac{\frac{r}{R} \times 360° \times \pi R^2}{360°} = \pi r R$$

Alors $\boxed{A = \pi r R}$ est l'aire latérale du cône de révolution de centre de base r et de génératrice R

• Exemple

Dans l'exemple précédent, on a $A = \pi r R = 3.14 \times 3 \times 5$
Alors $A = 47.1 cm^2$

3 Le volume

Le volume d'un cône de révolution est égale au tiers du produit de l'aire de sa base par la hauteur du solide

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

• Exemple

Dans l'exemple précédent, on a $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = V = \frac{1}{3} \times 3.14 \times 3^2 \times 4 = \frac{1}{3} \times 3.14 \times 9 \times 4$
Alors $V = 37.68 cm^3$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today