ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentale

Session : Normal-2 juin 2015

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentale**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** ..... **3 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **3 points**
- Exercice 3 : **Calcul des probabilités** ..... **3 points**
- Problème : **Etude d'une fonction numérique, calcul intégral et suites numériques** ..... **11 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, le plan (P) d'équation $x+y+z+4=0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1;-1;-1)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

0.75 pt **1 - a)** Calculer le distance $d(\Omega,(P))$ et en déduire que le plan (P) est tangente à la sphère (S).

0.5 pt **b)** Vérifier que le point $H(0;-2;-2)$ est le point de contact du plan (P) et la sphère (S).

2 - On considère les deux points $A(2;1;1)$ et $B(1;0;1)$.

0.75 pt **a)** Vérifier que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ et en déduire que $x-y-z=0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

0.5 pt **b)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω est orthogonale au plan (OAB).

0.5 pt **c)** Déterminer les coordonnées de chacun des deux points d'intersection de le droite (Δ) et de la sphère (S).

Exercice 2 : (3 points)

0.75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + 10z + 26 = 0$$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, les points A, B, C et Ω d'affixes respectifs a, b, c et ω tels que :

$$a = -2+2i,\ b = -5+i,\ c = -5-i \text{ et } \omega = -3$$

0.5 pt **a)** Montrer que : $\dfrac{b-\omega}{a-\omega} = i$.

0.5 pt **b)** En déduire la nature du triangle ΩAB.

3 - Soit le point D image du point C par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $6+4i$.

0.5 pt **a)** Montrer que l'affixe d du point D est $1+3i$.

0.75 pt **b)** Montrer que : $\dfrac{b-d}{a-d} = 2$ et en déduire que le point A est le milieu du segment $[BD]$.

Exercice 3 : (3 points)

Une urne contient huit boules : 3 boules rouges, 3 boules verts et deux boules blanches (les boules son indiscernables au toucher).

On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1.5 pt **1 -** On considère l'événement A suivant : "tirer une boule blanche au moins".

et l'événement B suivant : "tirer deux boules de même couleur".

Montrer que : $p(A) = \dfrac{13}{28}$ et $p(B) = \dfrac{1}{4}$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui égale au nombre de boules blanches tirées.

Toda n yesterday, tomorrow better than today

Yassine Elamri

0.5 pt **a)** Montrer que $p(X=2)=\dfrac{1}{28}$.

1 pt **b)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Problème : (11 points)

Partie 1

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^x-2x$.

0.75 pt **1 -** Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que g est décroissante sur $]-\infty,\ln 2]$ et croissante sur $[\ln 2,+\infty[$.

0.5 pt **2 -** Vérifier que $g(\ln 2)=2(1-\ln 2)$ puis déterminer le signe de $g(\ln 2)$.

0.5 pt **3 -** En déduire que $g(x)>0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Partie 2

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{e^x-2x}$. et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : $1cm$).

1 pt **1 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2}$.
(remarquer que $e^x-2x=x\left(\dfrac{e^x}{x}-2\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$)

0.5 pt **b)** Interpréter géométriquement chacun des deux derniers résultats.

0.75 pt **2 - a)** Montrer que $f'(x)=\dfrac{(1-x)e^x}{(e^x-2x)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.75 pt **b)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

0.25 pt **c)** Montrer que $y=x$ est une équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O origine du repère.

1 pt **3 -** Tracer, dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C).
(on prendra $\dfrac{1}{e-2}\approx 1,4$ et on admettra que la courbe (C) a deux points d'inflexion l'abscisse de l'un appartient à l'intervalle $]0,1[$ et l'abscisse de l'autre est supérieur à $\dfrac{3}{2}$).

0.75 pt **4 - a)** Montrer que $xe^{-x}\leq\dfrac{x}{e^x-2x}\leq\dfrac{1}{e-2}$ pour tout x de l'intervalle $[0,+\infty[$.

0.75 pt **b)** En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx=1-\frac{2}{e}$.

0.5 pt **c)** Soit, en cm^2, $A(E)$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=0$ et $x=1$. Montrer que : $1-\dfrac{2}{e}\leq A(E)\leq\dfrac{1}{e-2}$.

Partie 3

Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]-\infty;0]$:

$$h(x)=f(x)$$

Yassine Elamri

0.5 pt **1 -** Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

0.5 pt **2 -** Tracer, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $(C_{h^{-1}})$ représentative de la fonction h^{-1}.

Partie 4

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = -2 \text{ et } u_{n+1} = h(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

0.5 pt **1 -** Montrer par récurrence que $u_n \leq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **2 -** Montrer que la suite (u_n) est croissante.
(remarquer, graphiquement, que : $h(x) \geq x$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty, 0]$).

0.75 pt **3 -** En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

FIN

Yassine Elamri