Chapitre

Produit vectoriel dans ϑ_3

Historique

Le produit vectoriel prend naissance avec "l'invention" des quaternions en 1843, par HAMILTON. Le mathématicien américain GIBBS simplifie cet outil et définit le produit scalaire et le produit vectoriel dans une théorie appelée l'analyse vectorielle . Parallèlement à l'américain GIBBS, le mathématicien anglais HEAVISIDE Oliver introduit l'analyse vectorielle .
En mathématiques, et plus précisément en géométrie, le produit vectoriel et une opération vectorielle effectuée dans les espaces Euclidiens orientés de dimension 3 . Le formalisme utilisé actuellement est apparu en 1881 dans un manuel d'analyse vectorielle écrit par Josiah Willard Gibbs pour ses étudiants en physique.
Les travaux de Hermann Gunther Grassmann et William Rowan Hamilton sont à l'origine du produit vectoriel défini par Gibbs.

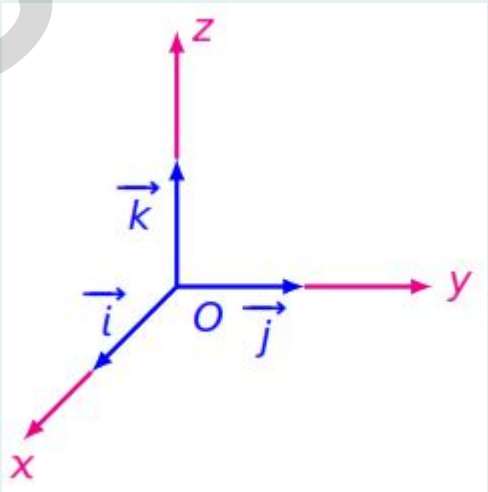
I Orientation dans lespace

1 Trièdre

Définition

Trois demi-droites [Ox), [Oy) et [Oz) de même origine O et non coplanaires déterminant, dans cet ordre un trièdre que l'on note (Ox ; Oy ; Oz).

- [Ox), [Oy) et [Oz) sont appelées les arêtes du trièdre (Ox ; Oy ; Oz).
- Les trois plan (xOy), (xOz) et (yOz) sont appelés les faces du trièdre (Ox ; Oy ; Oz).



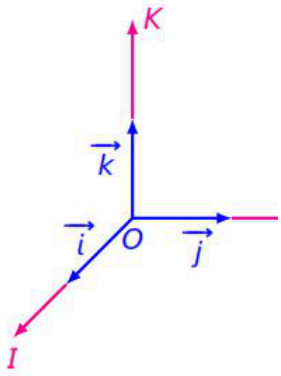
Yassine Elamri

2 Règle du Bonhomme d'Ampère

Définition

Le bonhomme d'Ampère du trièd
[OK), ses pieds sont à l'origine et

- ► Si [OJ) est à la gauche du b
- ► Si [OJ) est à la droite du bo



La base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est d

Définition

Soit $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK}\right)$ un repère d

- ► On dit que $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK}\right.$ recte) si le trièdre ([OI) ; [OJ) ; [OK)) est direct.
- ► On dit que $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK}\right)$ $\left(resp.\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK}\right)\right)$ est un repère indirect (resp. une base indirecte) si le trièdre ([OI) ; [OJ) ; [OK)) est indirect.

Remarque

☐ Si le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est orthogonal direct, alors :

- Les repères $\left(O;\vec{j};\vec{k};\vec{i}\right)$ et $\left(O;\vec{k};\vec{i};\vec{j}\right)$ Sont directs.
- Les repères $\left(O;\vec{j};\vec{i};\vec{k}\right)$ et $\left(O;\vec{k};\vec{j};\vec{i}\right)$ sonts indirects.

☐ L'espace ξ est orienté **positivement** lorsqu'il est muni d'un repère direct.

htt
yas

https://steinmath.com n yesterday, tomorrow better than today

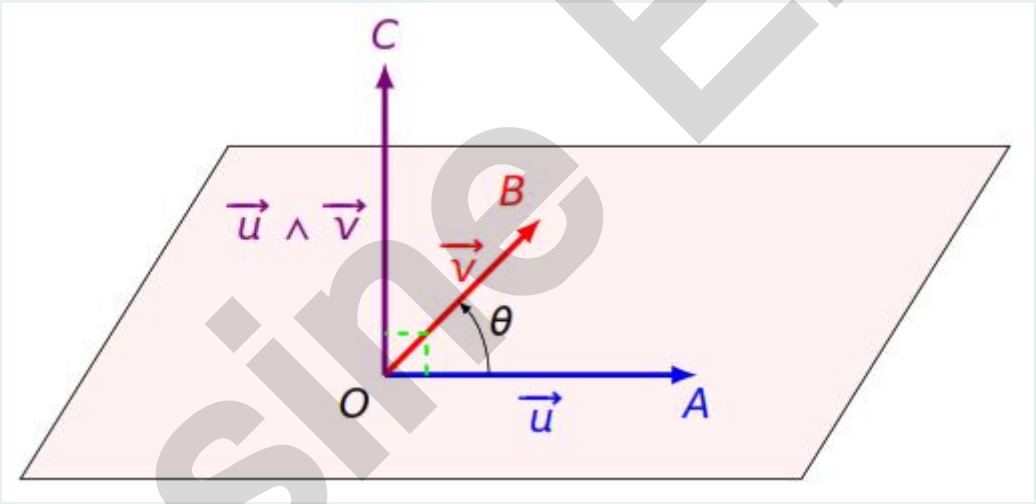
II Produit vectoriel de deux vecteurs

1 Définition du produit vectoriel

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
On appelle **le produit vectoriel** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dans cet ordre le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :

- ☐ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires , alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- ☐ Sinon :
  - Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
  - Le triple $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe .
  - $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . \sin\theta$ où θ est la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.



Remarque

- ☐ Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace ϑ_3 **sont colinéaires** si, et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- ☐ Les points A, B et C de l'espace sont alignés si, et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

• Exemple

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté tels que : $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u} . \vec{v} = 5$.
Calculons $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$? .
implies Solution :
Soit θ la mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}\right)$.

Yassine Elamri

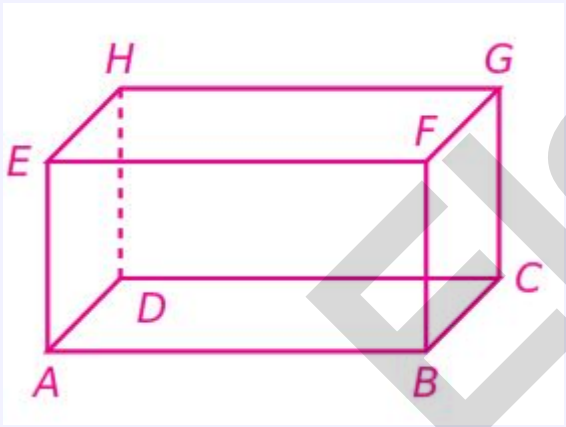
Today better than yesterday, tomorrow better than today

On a : $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \dfrac{1}{2}$ et $|\sin\theta| = \sqrt{1-\cos^2(\theta)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,.\,\|\vec{v}\|\,.\,|\sin\theta| = 2 \times 5 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

Application

On considère, ci-dessous, le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$:



1 . Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{EG} = \vec{0}$.

2 . Déterminer les vecteurs : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}$.

2 Interprétation géométrique du produit vectoriel

Propriété

Soit A, B et C trois points non-alignés de l'espace.

- La norme du produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est **l'aire du parallélogramme** formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- **L'aire du triangle** ABC est égale à : $\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.

• Exemple

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que : $AB = 6$ et $AD = 4$ et $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{6}$.

Notant $\mathscr{A}$ l'aire du parallélogramme $ABCD$ (en unité d'aire), on obtient :

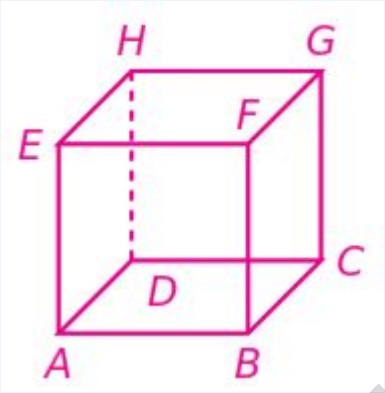
$$\mathscr{A} = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\| = AB \times AD \times \sin\widehat{BAD} = 6 \times 4 \times \frac{1}{2} = 12$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

On considère, ci-dessous, le cube $ABCDEFGH$ de coté x :



1 . Déterminer les vecteurs : $\overrightarrow{EH} \wedge \overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CA}$.

2 . Déduire, en fonction de x, l'aire du parallélogramme formé à partir des vecteurs $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{EF}$. Et celle du triangle ACD .

III Propriétés du produit vectoriel

1 Propriétés géométriques

Propriété

Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs l'espace, et α un réel.

- **Antisymétrie :** $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u})$
- **Bilinéarité :**
  - $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w})$ et $(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \wedge \overrightarrow{u} = (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u})$
  - $(\alpha \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge (\alpha \overrightarrow{v}) = \alpha(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$

• Exemple

Soit O, A, B et C des points de l'espace orienté (ξ).

Montrons que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}$.

On a :
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \wedge (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\
&= \overrightarrow{OB} \wedge (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) - \overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\
&= \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} \wedge (-\overrightarrow{OA}) - \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \wedge (-\overrightarrow{OA}) \\
&= \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OA} \\
&= \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}
\end{aligned}$$

car $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{0}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 Propriétés analytiques

Propriété

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormée directe de l'espace $(\xi_{/3})$.

- Pour tout vecteur $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{u}(x',y',z')$ de $(\xi_{/3})$.

On a : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}=(yz'-zy')\vec{i}-(xz'-zx')\vec{j}+(xy'-yx')\vec{k}$

- Le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ a pour coordonnées $(yz'-zy';xz'-zx';xy'-yx')$

Exemples

On a : $\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\,\vec{i}+y'\,\vec{j}+z'\,\vec{k}$. En tenant compte du fait que $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe , il en résulte de la bilinéarité du produit vectoriel :

$$\begin{aligned}
\vec{u}\wedge\vec{v} &= \left(\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}\right)\wedge x'\,\vec{i}+y'\,\vec{j}+z'\,\vec{k} \\
&= xx'\left(\vec{i}\wedge\vec{i}\right)+xy'\left(\vec{i}\wedge\vec{j}\right)+xz'\left(\vec{i}\wedge\vec{k}\right)+yx'\left(\vec{j}\wedge\vec{i}\right)+yy'\left(\vec{j}\wedge\vec{j}\right) \\
&\quad +yz'\left(\vec{j}\wedge\vec{k}\right)+zx'\left(\vec{k}\wedge\vec{i}\right)+zy'\left(\vec{k}\wedge\vec{j}\right)+zz'\left(\vec{k}\wedge\vec{k}\right) \\
&= xy'\left(\vec{i}\wedge\vec{j}\right)+xz'\left(\vec{i}\wedge\vec{k}\right)+yx'\left(\vec{j}\wedge\vec{i}\right)+yz'\left(\vec{j}\wedge\vec{k}\right)+zx'\left(\vec{k}\wedge\vec{i}\right)+zy'\left(\vec{k}\wedge\vec{j}\right) \\
&= (yz'-y'z)\left(\vec{j}\wedge\vec{k}\right)+(zx'-xz')\left(\vec{i}\wedge\vec{k}\right)+(xy'-x'y)\left(\vec{i}\wedge\vec{j}\right) \\
&= (yz'-y'z)\,\vec{i}+(zx'-xz')\,\vec{j}+(xy'-x'y)\,\vec{k}
\end{aligned}$$

par suite : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}$

• Exemple

On considère les vecteurs $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ et $\vec{v}=3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.
Déterminons les coordonnées du vecteur : $\vec{u}\wedge\vec{v}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:
On a : $\vec{u}(1,-2,3)$ et $\vec{u}(3,1,-1)$

Alors : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}=-\vec{i}+10\vec{j}+7\vec{k}$

Application

Soit $A(1;2;1),B(0;-3;2)$ et $C(1;0;-1)$trois points de l'espace.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{CB}$ et $-2\overrightarrow{BA}\wedge3\overrightarrow{CB}$
2. Déduire l'aire du triangle ABC.

Yassine Lamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Applications du produit vectoriel

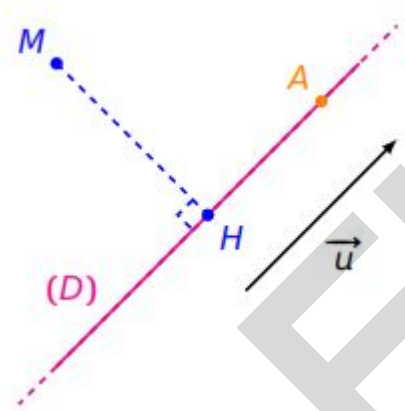
https://steinmath.com day better than yesterday, tomorrow better than today

2 Distance dun point à une droite

Propriété

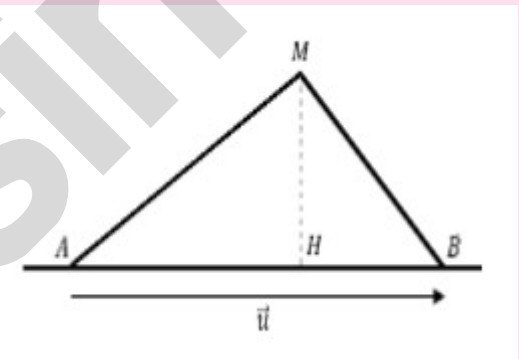
Soit (D) une droite passant par le point A de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et M un point de l'espace. On a :

$$d(M;(D)) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$$



EXEMPLES

On pose : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur directeur de la droite (D) .
Soit M un point de l'espace $\mathscr{E}$ et H son projeté orthogonal sur la droite (D) .



L'aire du triangle ABM est : $S = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|$
et on a : $S = \frac{1}{2}AB \times MH$. Par Conséquent : $AB \times MH = \left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|$
c'est à dire : $MH = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|}{AB}$. Par suite : $d(M;(D)) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

Calculons la distance du point M (-1 ; 0 ; 1) à la droite (D) définie par :

$(D):\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=2t \end{cases}$ $avec : t \in \mathrm{R}$.

La droite (D) passe par le point A (1 ; 1 ; 0) et dirigée par le vecteur $\vec{u}\,(2;1;2)$.

Puisque $\overrightarrow{AM}\,(2;1;1)$ et $\vec{u}\,(2;1;2)$, alors :

$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$.

On a donc : $\left\| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \right\| = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$ et $\| \vec{u} \| = \sqrt{4+1+4} = 3$

Ainsi : d (M , (D)) $=\sqrt{5}$.

Application

1 . Calculer la distance du point M (1 ; 0 ; 3) à la droite (D) passant par le point $A\,(0;1;3)$ et B (2 ; 4 ; 0) .

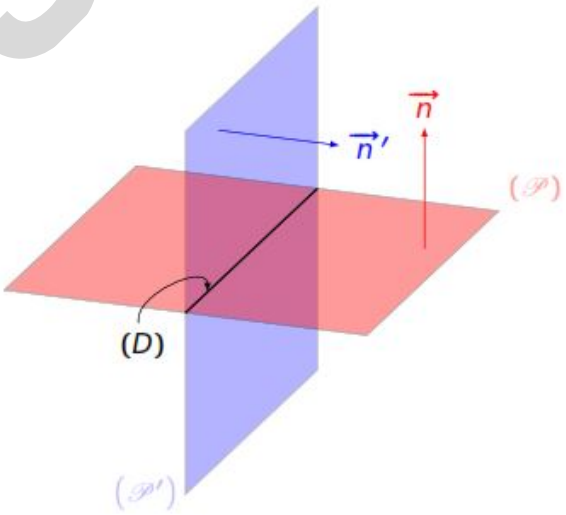
2 . Calculer la distance du point $M\,(1;0;3)$ à la droite (Δ) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=3+t \\ y=-1-t \\ z=-3+2t \end{cases} \quad avec : t \in \mathrm{R} .$$

3 Intersection de deux plans de l'espace

Propriété

Soient $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ deux plans sécants suivant une droit (D) dans l'espace orienté.
Si $\vec{n}$ est vecteur normal à un plan $(\mathscr{P})$ et $\vec{n}'$ est vecteur normal à un plan $(\mathscr{P}')$ **Alors** : $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ est un vecteur directeur de la droite d'intersection (D) .



Yassine Elamri
https://steinmath.com day, tomorrow better than today

Application

Étudier l'intersection des plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ dans chacun des cas suivants :

1. $(\mathscr{P}) : x-y+2z+3=0$ et $(\mathscr{P}') : x+2y+2z-1=0$.
2. $(\mathscr{P}) : 3x-4y+5z+7=0$ et $(\mathscr{P}') : 2x-3y-z-4=0$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today