ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Normale 1 Juin 2015

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Géométrie dans lespace** ..... **3 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **3 points**
- Exercice 3 : **Calcul des probabilités** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **Étude dune fonction numérique et suites numériques** . **11 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les deux points $A(2,1,0)$ et $B(-4,1,0)$. Soit (P) le plan passant par le point A et $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ son vecteur normal.

0.5 pt **1 -** Montrer que $x + y - z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P).

2 - Soit (S) l'ensemble de points M de l'espace qui vérifient la relation : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

0.75 pt Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(-1,1,0)$ et de rayon 3.

3 - a) Calculer la distance du point Ω du plan (P) puis en déduire que (P) coupe (S) suivant

0.5 pt un cercle (C).

0.5 pt **b)** Montrer que le centre du cercle est le point $H(0,2,-1)$.

0.75 pt **4 -** Montrer que $\overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle OHB.

Exercice 2 : (3 pts)

I-On considère le nombre complexe a tel que : $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

0.5 pt **1 -** Montrer que le module du nombre complexe a est : $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

0.25 pt **2 -** Vérifier que a $= 2\left(1 + \cos\dfrac{\pi}{4}\right) + 2i \sin\dfrac{\pi}{4}$.

0.25 pt **3 - a)** En linéarisant $\cos^2\theta$ avec θ est un nombre réel, montrer que :$1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$. .

0.5 pt **b)** Montrer que $a = 4\cos^2\dfrac{\pi}{8} + 4i\cos\dfrac{\pi}{8}\sin\dfrac{\pi}{8}$. (on rappelle que $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$)

c) Montrer que $4\cos\dfrac{\pi}{8}\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$ est une forme trigonométrique du nombre a puis

0.5 pt montrer que $a^4 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$.

II- On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$,et les deux points Ω et A d'affixes respectives ω et a tels que : $\omega = \sqrt{2}$ et $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

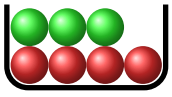
0.5 pt **1 -** Montrer que l'affixe b du point B l'image du point A par la rotation R est $2i$.

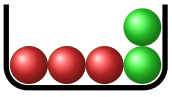
0.5 pt **2 -** Déterminer l'ensemble de points M d'affixe z tel que $|z - 2i| = 2$.

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne U_1 contient 7 boules : quatre boules rouges et trois boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).

Une autre urne U_2 contient 5 boules : trois boules rouges et deux boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).

L'urne U_1 

L'urne U_2 

Yassine Elamri
Toda https://steinmath.com erday, tomorrow better than today

I) On considère l'épreuve suivante : On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne U_1.

Soit l'événement A :"On tire une seule boule rouge et deux vertes"

et l'événement B :" On tire trois boules de même couleur".

2 pt Montrer que $p(A) = \frac{12}{35}$ et $p(B) = \frac{1}{7}$.

II) On considère l'épreuve suivante : On tire simultanément et au hasard deux boules de U_1 puis on tire au hasard une seule boule de U_2 .

Soit l'événement C : "On tire trois boules rouges".

1 pt Montrer que $p(C) = \frac{6}{35}$.

Problème : (11 pts)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x telle que : $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$.

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (unité 2 cm). **I)**

0,5 pt **1 -** Montrer que $D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$ (D_f est l'ensemble de définition de la fonction f).

2 - a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x\to e}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} f(x)$ puis interpréter géométriquement les deux résultats obtenus. **0,75 pt**

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ que l'on déterminera. **0,5 pt**

c) Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ puis donner une interprétation géométrique à ce résultat (pour calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$; remarquer que $x(1-\ln x) = x - x\ln x$). **0,5 pt**

0,75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ pour tout x de D_f.

b) Montrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle] 0,1] et croissante sur chacun des deux intervalles $[1, e[$ et $]e, +\infty[$. **1 pt**

0,25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f.

II)

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2(1-\ln x)$

et soit (C_g) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé (voir la figure).

1 - a) Déterminer graphiquement le nombre de solutions (s) de l'équation (E) suivante : $g(x) = 0, x \in]0, +\infty[$. **0,5 pt**

0,5 pt **b)** Montrer que l'équation (E) admet une solution α telle que : $2,2 < \alpha < 2,3$.

0,25 pt **2 - a)** Vérifier que $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ pour tout x de D_f.

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ coupe la courbe (C_f) aux deux points d'abscisses 1 et α. **0,5 pt**

c) Déterminer, à partir de (C_g), le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1, \alpha]$ et montrer que $f(x) - x \leq 0$ pour tout x de $[1, \alpha]$. **0,5 pt**

Yassine Elamri

1,25 pt **3 -** Tracer, dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (Δ) et la courbe (C_f).

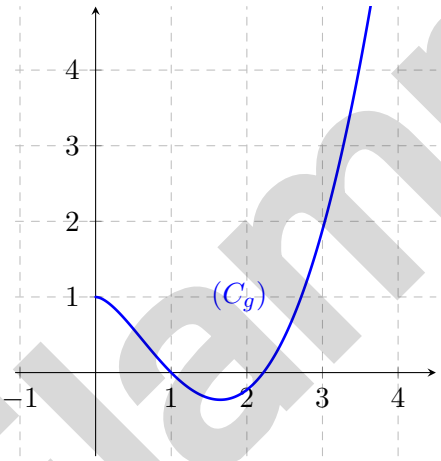
4 - a) Montrer que $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx = \ln 2$.

0,75 pt (remarquer que : $\frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ pour tout x de D_f)

0,75 pt **b)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), la droite (Δ), et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$.

On donne le tableau de valeurs suivant :

x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	$-0,14$	$-0,02$	0,12	0,28



III) On considère la suite numérique (u_n) définie par :
$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 -** Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question **II)2. c)).**.

0,5 pt

0,75 pt **3 -** En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

FIN

Yassine Elamri