I Fonction linéaire

1 Définition

Définition

Soit a un nombre réel
Toute relation qui, à tout nombre réel x, fait correspondre le nombre réel ax s'appelle fonction linéaire de coefficient a et on écrit $f(x) = ax$
On dit que ax est l'image de x par la fonction f

2 Exemples

• Exemple

Soient f, g et h des fonctions linéaires définies par : $f(x) = \frac{1}{3}x$, $g(x) = 0x$ et $h(x) = -\sqrt{5}x$

1. Déterminer le coefficient des fonctions f, g et h
2. Calculer : $f(0)$, $g(-1)$ et $h(\sqrt{3})$
3. Calculer l'image de 3 par la fonction f
4. Calculer le nombre d'image -8 par la fonction h

Solution

1. f est une fonction linéaire de coefficient $\frac{1}{3}$
   g est une fonction linéaire de coefficient 0
   h est une fonction linéaire de coefficient $-\sqrt{5}$
2. Calculons $f(0)$, $g(-1)$ et $h(\sqrt{3})$
   $f(0) = \frac{1}{3} \times 0 = 0$
   $g(-1) = 0 \times (-1) = 0$
   $h(\sqrt{3}) = -\sqrt{5} \times \sqrt{3} = -\sqrt{5 \times 3} = -\sqrt{15}$
3. Calculons l'image de 3 par f
   On a $f(3) = \frac{1}{3} \times 3 = \frac{3}{3} = 1$
   Donc l'image de 3 par la fonction f est 1
4. Calculons le nombre d'image -8 par h
   Résolvons l'équation $h(x) = -8$
   L'équation $h(x) = -8$ est respectivement équivalente à $-\sqrt{5} \times x = -8$

Yassine Elamri

C'est à dire $x = \dfrac{-8}{-\sqrt{5}} = \dfrac{8\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

Donc le nombre d'image -8 par la fonction h est $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

3 Propriétés

Proposition

Coefficient d'une fonctio linéaire Si f est une fonction linéaire et x un nombre réel non nul
Donc, le coefficient de la fonction f est $a = \dfrac{f(x)}{x}$

• Exemple

On considère la fonction linéaire f tel que : $f(2) = 6$
Déterminer l'expression de la fonction f

Solution

Déterminons l'expression de f
On a f est une fonction linéaire donc $f(x) = ax$ et son coefficient est $a = \dfrac{f(2)}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$
Alors $f(x) = 2x$

4 Représentation graphique d'une fonction linéaire

Proposition

Soit $(O;I;J)$ un repère orthonormé
La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère O

• Exemple

Soit g une fonction linéaire définie par : $g(x) = \dfrac{-2}{3}x$

1. Calculer $g(3)$
2. Construire la représentation graphique de la fonction g dans un repère orthonormé $(O;I;J)$

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today

Solution

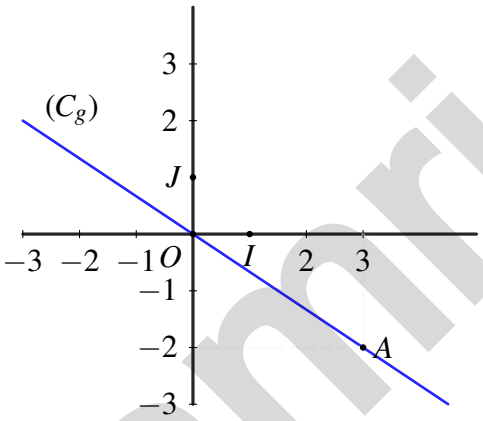
1 Calculons $g(3)$

On a $g(x) = \dfrac{-2}{3}x$

Donc $g(3) = \dfrac{-2}{3} \times 3 = -2$

2 Construisons la représentation graphique de la fonction g

On a $g(3) = -2$ et g est linéaire, donc la représentation graphique de la fonction g est une droite qui passe par les points Ω00 et Α3−2



⚠

❶ Le point Μxy appartient à la représentation graphique d'une fonction linéaire f signifie que $f(x) = y$

❷ Pour déterminer, graphiquement, l'image d'un nombre b par une fonction linéaire f, on construit la droite verticale passante par b qui coupe (C_f) la représentation graphique de la fonction f en un point d'ordonnée c, donc $f(b) = c$

❸ Pour déterminer, graphiquement, le nombre dont l'image est c par une fonction linéaire f, on construit la droite horizontale passante par c qui coupe (C_f) la représentation graphique de la fonction f en un point d'abscisse b, donc $c = f(b)$

❹ Si $f(x)ax$ est une fonction linéaire , donc l'équation de la droite (Δ) la représentation graphique de la fonction f est : $(\Delta) : y = ax$

Application

Soit f une fonction linéaire définie par $f(x) = -2x$

1 Est-ce-que les points Α−15 et Β3−6 appartiennent à (C_f)

2 Tracer (C_f)

Solution

1 ★ On a $f(-1) = -2 \times (-1) = 2 \neq 5$, donc $A \notin (C_f)$

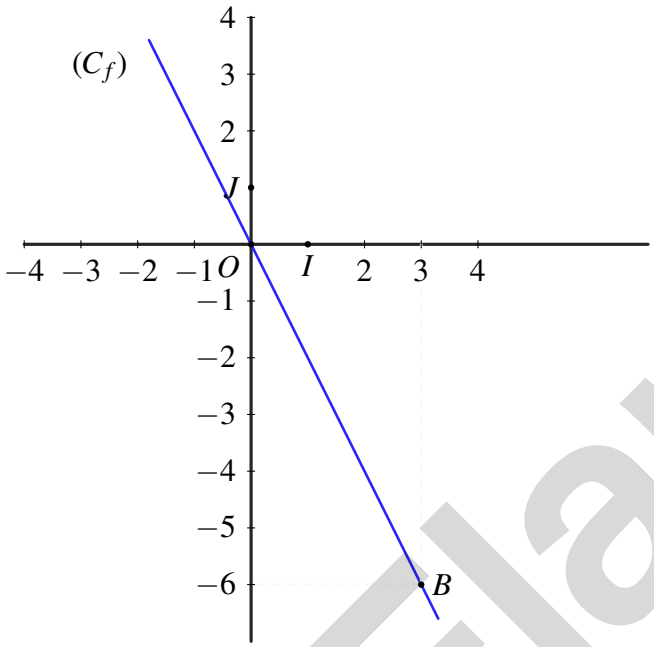
★ On a $f(3) = -2 \times 3 = -6$, donc $B \in (C_f)$

2 Traçage de (C_f)

f est une fonction linéaire et $B \in (C_f)$, donc (C_f) est une droite qui passe par les points Ω00 et Β3−6

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today



II Fonction affine

1 Définition

Définition

Soient a et b deux nombres réels donnés
Toute relation qui, à tout nombre réel x, fait correspondre le nombre réel $ax+b$ s'appelle fonction affine de coefficient a et on écrit $f(x)=ax+b$
Le nombre $ax+b$ s'appelle l'image de x par la fonction f

2 Exemples

• Exemple

Soient f, g et h des fonctions affines définies par : $f(x)=x-3$, $g(x)=5$ et $h(x)=-\frac{3}{2}x+1$

1. Déterminer le coefficient des fonctions f, g et h
2. Calculer : $f(0)$, $g(-1)$ et $h(\frac{1}{3})$
3. Calculer l'image de 2 par la fonction f
4. Calculer le nombre d'image 6 par la fonction h

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today

Solution

1 f est une fonction affine de coefficient 1
g est une fonction affine de coefficient 0
h est une fonction affine de coefficient $-\frac{3}{2}x$

2 Calculons $f(0)$, $g(-1)$ et $h(\frac{1}{3})$
$f(0) = 0-3 = -3$
$g(-1) = 5$
$h(\frac{1}{3}) = -\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}+1 = -\frac{3}{6}+1 = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$

3 Calculons l'image de 2 par f
On a $f(2) = 2-3 = -1$
Donc l'image de 2 par la fonction f est -1

4 Calculons le nombre d'image 6 par h
Résolvons l'équation $h(x) = 6$
L'équation $h(x) = 6$ est respectivement équivalente à $-\frac{3}{2}x+1 = 6$
C'est à dire $\frac{3}{2}x = -6+1 = -5$, donc $x = \frac{-5}{\frac{3}{2}} = -5\times\frac{2}{3} = -\frac{10}{3}$
Donc le nombre d'image 6 par la fonction h est $-\frac{10}{3}$

3 Propriété

Proposition

Coefficient d'une fonction affine Si f est une fonction affine et x et x' deux nombres réels tel que $x \neq x'$
Donc, le coefficient de la fonction f est $a = \frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$

• Exemple

On considère la fonction affine f tel que : $f(0) = 3$ et $f(1) = 5$
Déterminer l'expression de la fonction f

Solution

Déterminons l'expression de f
On a f est une fonction affine donc $f(x) = ax+b$ et son coefficient est $a = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{5-3}{1} = 2$

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today

Donc $f(x)=2x+b$
Déterminons b
On a $f(0)=3$, donc $2\times 0+b=3$, donc $b=3$
Alors $f(x)=2x+3$

4 Représentation graphique d'une fonction affine

Proposition

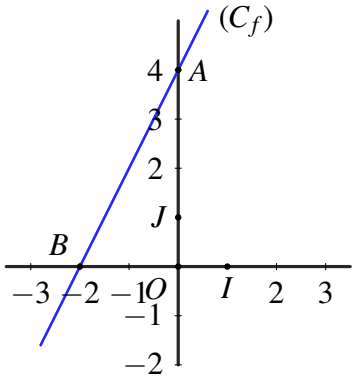
Soit $(O;I;J)$ un repère orthonormé
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui passe par les points $A\,x\,f(x)$ et $B\,x'\,f(x')$

• Exemple

On considère la fonction affine f définie par : $f(x)=2x+4$
Tracer, dans un repère orthonormé $(O;I;J)$, la représentation graphique (C_f) de la fonction f

Solution

Traçons la représentation graphique de la fonction f
Calculons $f(0)$ et $f(-2)$
On a $f(0)=2\times 0+4=0+4=4$
Et $f(-2)=2\times(-2)+4=-4+4=0$
Donc la représentation graphique de la fonction g est la droite qui passe par les points $A\,0\,4$ et $B\,-2\,0$



⚠
❶ Le point $M\,x\,y$ appartient à la représentation graphique d'une fonction affine f signifie que $f(x)=y$
❷ Les méthodes graphique pour déterminer les images et les nombres dont on connait leurs images restent valables pour une fonction affine
❸ Si $f(x)ax+b$ est une fonction affine , donc $f(0)=b$ et l'équation de la droite (Δ) la représentation graphique de la fonction f est : $(\Delta):y=ax+b$
❹ Pour déterminer l'intersection de la représentation graphique d'une fonction affine f avec l'axe des abscisses, on résout l'équation $f(x)=0$ et le point d'intersection est donc : $A\,x\,0$
❺ Pour déterminer l'intersection de la représentation graphique d'une fonction affine f avec l'axe des ordonnées, on calcul $f(0)$ et le point d'intersection est donc : $B\,0\,f(0)$
❻ La fonction $f(x)=a$ est une fonction affine de coefficient 0 (ou fonction constante),

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today

et sa représentation graphique est la droite passante par le point A0a et parallèle à l'axe des abscisses

Application

Soient f et g deux fonctions tel que : $f(x)=ax$ et $g(x)=2x+b$

1. Déterminer a et b tel que $f(-1)=3$ et $g(0)=5$
2. Calculer $f(2)$ et $g(-1)$
3. Déterminer le nombre d'image -4 par la fonction f
4. Déterminer le nombre d'image 7 par la fonction g
5. Tracer (D) et (Δ) les représentations graphiques des fonctions f et g respectivement dans un repère orthonormé (O ;I ;J)
6. Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de (D) et (Δ) graphiquement et algébriquement

Solution

1. Déterminons a et b

✸ f est une fonction linéaire , donc son coefficient est $a=\dfrac{f(-1)}{-1}=\dfrac{3}{-1}=-3$

Alors $f(x)=-3x$

✸ On a $g(0)=5$, donc $2\times 0+b=5$, d'ou $b=5$

Alors $g(x)=2x+5$

2. Calculons $f(2)$ et $g(-1)$

✸ $f(2)=-3\times 2=-6$

✸ $g(-1)=2\times(-1)+5=-2+5=3$

3. Déterminons le nombre d'image -4 par f

L'équation $f(x)=-4$ est respectivement équivalent à $-3x=-4$, c'est à dire $x=\dfrac{-4}{-3}=\dfrac{4}{3}$

Alors le nombre d'image -4 par f est $\dfrac{4}{3}$

4. Déterminons le nombre d'image 7 par g

L'équation $g(x)=7$ est respectivement équivalent à $2x+5=7$, 'est à dire $2x=7-5=2$,

donc $x=\dfrac{2}{2}=1$

Alors le nombre d'image 7 par g est 1

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today

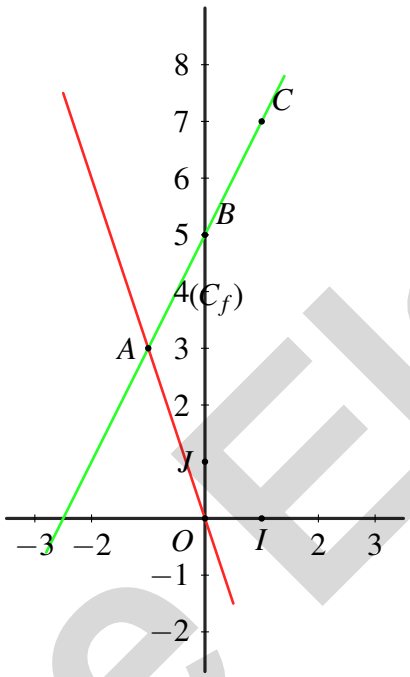
5 Traçons (D) et (Δ)

x	0	-1
$f(x)$	0	3

(D) passe par les points $O(0;0)$ et $A(-1;3)$

x	0	1
$g(x)$	5	7

(Δ) passe par les points $B(0;5)$ et $C(1;7)$



6 Déterminons les coordonnées de H

✸ Graphiquement :

Les deux droites (D) et (Δ) se coupent au point $H(-1;3)$

✸ Algébriquement :

On résout l'équation $f(x) = g(x)$

L'équation $f(x) = g(x)$ est respectivement équivalent à $-3x = 2x + 5$, c'est à dire $-3x - 2x = 5$

Donc $-5x = 5$, donc $x = \dfrac{5}{-5} = -1$

Et on a $f(-1) = 3$

Alors $H(-1;3)$ est le point d'intersection des droites (D) et (Δ)

Yassine Elamri

Yesterday better than today, tomorrow better than today