ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences experimentales

Session : rattrapage juillet 2016

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

- L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

— Exercice 1 : **Suites numériques** ..... **3 points**
— Exercice 2 : **Géométrie dans l'espace** ..... **3 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** ..... **3 points**
— Exercice 4 : **Calcul de probabilités** ..... **3 points**
— Exercice 4 : **Etude d'une fonction numérique et calcul intégral** ..... **8 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16}$ pour tout entier naturel n

0,5 pt **1 - a)** Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout entier naturel n.

0,5 pt **b)** Vérifier que $u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1)$ pour tout entier naturel n puis montrer que la suite (u_n) est décroissante.

0,25 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2 - Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 1$ pour tout entier naturel n.

1 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{16}$ puis écrire v_n en fonction de n.

0,75 pt **b)** Montrer que $u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$ pour tout entier naturel n, puis déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 3, 4)$ et $B(0, 1, 2)$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

0,5 pt **b)** Montrer que $2x - 2y + z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

2 - Soit (S) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 6z + 2 = 0$.

0,5 pt Montrer que (S) a pour centre le point $\Omega(3, -3, 3)$ et pour rayon 5.

0,75 pt **3 - a)** Montrer que le plan (OAB) est tangent à la sphère (S).

0,75 pt **b)** Déterminer les coordonnées du point de contact H du plan (OAB) et de la sphère (S).

Exercice 3 : (3 pts)

0,75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes C l'équation : $z^2 - 8z + 41 = 0$.

2 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives a, b, c et ω telles que $a = 4 + 5i$, $b = 3 + 4i$, $c = 6 + 7i$ et $\omega = 4 + 7i$.

0,75 pt **a)** Calculer $\frac{c-b}{a-b}$ puis en déduire que les points A, B et C sont alignés.

b) Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

0,75 pt Montrer que $z' = -iz - 3 + 11i$.

0,75 pt **c)** Déterminer l'image du point C par la rotation R puis donner une forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{a-\omega}{c-\omega}$.

Yassine Elamri

Toda n yesterday, tomorrow better than today

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient 10 boules portant les nombres $1;2;2;3;3;3;4;4;4;4$ (Les boules sont indiscernables au toucher)

On considère l'expérience suivante : on tire au hasard , successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

1 - Soit A l'évènement :" Obtenir deux boules portant deux nombres pairs".

1 pt Montrer que $p(A) = \frac{1}{3}$.

2 - On répète l'expérience précédente trois fois de suite, en remettant dans l'urne les deux boules tirées après chaque expérience. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'évènement A est réalisé.

2 pt Montrer que $p(X=1) = \frac{4}{9}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 5 : (8 pts)

I - On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{2}{x} - 1 + 2\ln x$

On donne, ci-contre, le tableau de variation de g sur $]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$g(1)$	↗	$+\infty$

0,5 pt **1 -** Calculer $g(1)$.

0,25 pt **2 -** En déduire à partir du tableau que $g(x) > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

II - On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = 3 - 3x + 2(x+1)\ln x$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité $2cm$.

0.75 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

0.5 pt **2 -** **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\left(\text{Remarque que f(x) s'écrit sous la forme } f(x) = x\left[\frac{3}{x} - 3 + 2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right]\right)$

0,5 pt **b)** Étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

0.75 pt **3 -** **a)** Montrer que $f'(x) = g(x)$, pour tout x de $]0,+\infty[$.

0.75 pt **b)** Étudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation sur $]0,+\infty[$.

0.5 pt **4 -** **a)** Montrer que $I(1;0)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C_f).

0.25 pt **b)** Montrer que $y = x - 1$ est l'équation de la tangente (T) au point $I(1;0)$ à la courbe . (C_f)

0,75 pt **c)** Tracer sur le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C_f).

0.5 pt **5 -** **a)** Montrer que : $\int_1^2 \left(1+\frac{x}{2}\right)dx = \frac{7}{4}$.

0,75 pt **b)** Montrer, en utilisant une intégration par parties, que : $\int_1^2 (x+1)\ln x dx = 4\ln 2 - \frac{7}{4}$.

Yassine Elamri

0.5 pt **c)** Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

0.5 pt **6 -** Résoudre graphiquement, dans l'intervalle $]0; +\infty[$, l'inéquation : $(x+1)\ln x \geq \frac{3}{2}(x-1)$.

FIN

Yassine Elamri

Toda n yesterday, tomorrow better than today