Chapitre

Calcul de probabilités

I Expériences aléatoires - Vocabulaire

1 Définitions

Activité

Expérience 1 : On lance un dé et on note le résultat la face supérieure. Quel sont les résultats possibles ?

Expérience 2 : On lance une pièce de monnaie 3 fois successives et on note à chaque fois le résultat de la face supérieure. Quel sont les résultats possibles ?

D — Définition

On appelle **expérience aléatoire** tout expérience dont les résultats possibles sont connus mais on ne peut pas donner le résultat exact avant de la réaliser.

À titre d'exemple les deux expériences précédentes.

D — Définition

Dans une expérience aléatoire chaque cas possible est appelé **éventualité** ou **issue**.

Exemple

Dans l'expérience 1: 3 est une éventualité

Dans l'expérience 2: FFP est une éventualité

D — Définition

Les éventualités d'une expérience aléatoire constituent un ensemble qu'on l'appelle **univers**.

On le note souvent Ω.

Yassine Elamri

Exemple

$$\begin{cases} \text{Dans l'expérience 1:} & \Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \\ \text{Dans l'expérience 2:} & \Omega = \{FFF, FFP, FPF, PFF, FPP, PFP, PPF, PPP\} \end{cases}$$

D Définition

1. Un événement est une partie de l'univers Ω.
2. Un événement constitué d'une seule éventualité est appelé événement élémentaire.

Exemple

L'événement A:"obtenir la face P une seul fois" issu de l'expérience 2. Représente exactement la partie $A = \{PFF, FPF, FFP\}$ de Ω.

Remarque

1. Si le résultat d'une expérience aléatoire appartient à un événement A, on dit que l'événement A est réalisé.
2. L'univers Ω d'une expérience aléatoire est appelé l'**événement certain**, car le résultat de l'expérience est toujours dans Ω.
3. $\emptyset$ est appelé l'événement impossible.

2 Réalisation des événements "A ou B" et "A et B"

D Définition

Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire.

1. L'événement "A ou B" est l'événement formé par les issues qui réalisent l'un au moins des événements A et B, noté par $A \cup B$.
2. L'événement "A et B" est l'événement formé par les issues qui réalisent à la fois A et B, noté par $A \cap B$.
3. Deux événements qui ne peuvent pas se réaliser en même temps sont dites incompatibles.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exemple

Dans **l'expérience 1**, on considère les événements :

A:"Obtenir un nombre impair".

B:"Obtenir un nombre pair".

C:"Obtenir un multiple de 3".

On a $A=\{1,3,5\}$, $B=\{2,4,6\}$ et $C\{3,6\}$. Donc $A\cap C=\{3\}$, c'est à dire si on obtenu la face 3 alors on dit que l'événement $A\cap C$ est réalisé.

D'autre part $A\cap B=\emptyset$, c'est à dire l'événement $A\cap B$ n'est jamais réalisé. Dans ce cas on dit que les deux événements A et B sont **incompatibles**.

3 Événement contraire

D Définition

L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$, est l'événement former des issues de Ω qui ne réalisent pas A.

Remarque

$A\cap\overline{A}=\emptyset$ et $A\cup\overline{A}=\Omega$.

Exemple

Dans l'**expérience 1**, on considère l'événement A:"obtenir un nombre pair". On a $A=\{2,4,6\}$. L'événement contraire de A est $\overline{A}$:"obtenir un nombre impair", et on a $\overline{A}=\{1,3,5\}$.

II Probabilités d'un événement

1 Probabilités d'un événement

Activité

On a simulé n lances d'un dé équilibré à si faces, numérotées de 1 à 6, et on a noté le nombre d'apparition du nombre 5.

Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus.

Yassine Elamri

Le nombre de lances n	10	50	100	500	1000	10000	100000
Le nombre d'apparition du nombre 5	3	10	19	76	161	1981	16649
Les fréquences d'apparition du nombre 5 : f_i		0.2			0.161		
$\lvert f_i - \frac{1}{6} \rvert$							

1. Recopier et compléter le tableau précédent.
2. a. Calculer : $P(\{1\})+P(\{2\})+P(\{3\})+P(\{4\})+P(\{5\})+P(\{6\})$.
   b. Conjecturer $P(\Omega)$.
3. Soit A l'événement : "le dé désigne un nombre pair". Calculer $P(A)$.
4. Vérifier que : $P(A)=P(\{2\})+P(\{4\})+P(\{6\})$

D **Définition**

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. La probabilité d'un événement A égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constitue.

Propriété

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. A et B deux événements.

1. $P(\Omega)=1$
2. $P(\emptyset)=0$
3. $0 \leq P(A) \leq 1$
4. $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$
5. $P(\overline{A})=1-P(A)$

Application

Soit $\Omega=\{a,b,c\}$ l'univers d'une expérience aléatoire. tel que $P(\{a,c\})=\frac{1}{3}$ et $P(\{a,b\})=\frac{4}{5}$. Déterminer $P(\{a\})$, $P(\{b\})$ et $P(\{c\})$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 Hypothèse d'équiprobabilité

D **Définition**

Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit qu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

Propriété

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

Dans une situation équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est donner par : $P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.

Application

Une urne contenant 7 boules indiscernables au toucher. 4 blanches et 3 noirs. On tire simultanément 3 boules. Calculer la probabilité des événements suivantes :

A:"Obtenir 3 boules de même couleurs".

B:"Obtenir une boule blanche au plus".

3 Probabilité conditionnelle

Activité

Une urne contenant 6 boules rouges numérotés comme suite $0,0,1,1,1,1$ et 9 boules vertes numérotés comme suite $0,0,0,0,0,0,1,1,1$ indiscernables au toucher. On tire une boule du l'urne.

1. Calculer la probabilité des événements suivantes :

   A:"Obtenir une boule rouge".

   B:"Obtenir une boule verte".

   C:"Obtenir une boule portant le numéro 1".

   D:"Obtenir une boule portant le numéro 0".

   $A \cap C$.

   $B \cap D$.

2. Si la boule tirée est verte, qu'il est la probabilité d'être portant le numéro 0 ?

3. Si la boule tirée est rouge, qu'il est la probabilité d'être portant le numéro 1 ?

4. Comparer $P(B|D)$ et $\dfrac{P(B \cap D}{P(D)}$ puis $P(C|A)$ et $\dfrac{P(C \cap A}{P(A)}$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

D **Définition**

Soient A et B deux événements associés à la même expérience aléatoire tels que $P(A) \neq 0$. La probabilité de B sachant que A est réalisé est le nombre qu'on le note par $P_A(B)$ ou $P(B/A)$ tel que : $P(B/A) = P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Dans le cas d'équiprobabilité : $P(B/A) = \dfrac{Card(A \cap B)}{Card(A)}$.

Application

On lance deux dés X et Y équilibrer une fois. Calculer la probabilité de l'événement :

E:"La somme des deux nombres X et Y égale à 7 sachant que l'une des deux égale à 3".

4 Indépendance

a a.Indépendance de deux événements

D **Définition**

Soient A et B associés à la même expérience aléatoire. On dit que A et B sont **indépendantes** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Intuitivement, deux événements A et B sont dits indépendantes si la réalisation de l'un de ces événements n'influe pas sur la probabilité de l'autre.

Application

Deux élèves A et B passant un examen tels que la probabilité que A réussie est $\dfrac{4}{5}$ et la probabilité que B réussie est $\dfrac{3}{5}$.

1. Quelle est la probabilité que A et B réussie tout les deux en même temps ?
2. Quelle est la probabilité que l'un des deux élèves réussie au moins ?

b b.Indépendance de deux épreuves

Une expérience aléatoire est constituant d'une ou bien plusieurs épreuves, par exemple : lancement d'une pièce de monnaie 4 fois successives, lancement d'un dé deux fois successives... On remarque dans quelques expériences que les résultats d'une épreuve n'affecte aucun changements sur l'épreuve suivante. Dans ce cas on dit que l'expérience est constituant par des épreuves indépendantes.

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

III Variables aléatoires

1 Définitions et exemples

Activité

Une urne contenant 6 boules numérotés comme suite : $0,1,1,2,2,2$ indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules du l'urne et soit Ω l'univers de cette expérience.

1. Déterminer $Card(\Omega)$
2. Soit X l'application qui faite associée chaque éléments de Ω par la somme des nombres obtenus. Déterminer les valeurs possible de X.
3. Calculer $P(X=1)$, $P(X=2)$, $P(X=3)$ et $P(X=4)$.

D — Définition

On appelle variable aléatoire tout application X qui faite associée chaque éléments de Ω par un nombre réel.

D — Définition

Soit X un variable aléatoire définie sur un univers Ω d'une expérience aléatoire. L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$.

Déterminer la **loi de probabilité de** X c'est de calculer tout les probabilités $P(X=x_i)$ avec $x_i \in X(\Omega)$. On peut donner la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(X=x_i)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	$\ldots$	$P(X=x_n)$

Remarque

1. L'événement $(X<k)$ c'est l'ensemble de tout les éventualités sur lesquelles X prendre un valeur inférieur à k.
2. On a : $P(X=x_1)+P(X=x_2)+\cdots+P(X=x_n)=1$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

Une urne contenant 6 boules blanches et deux boules noirs. On tire deux boules successivement et sans remise. Soit X la variable aléatoire qui faite associée chaque éventualité avec le nombre des boules blanche obtenues.

1. Déterminer le nombre d'éventualités possibles.
2. Déterminer $X(\Omega)$.
3. Déterminer la loi de probabilité de X.

2 Paramètres d'une variable aléatoire

a a.Espérance mathématique

D Définition

Soit X un variable aléatoire définie sur un univers Ω d'une expérience aléatoire tel que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Si on pose $p_i = P(X = x_i)$, alors **l'espérance mathématique** de la variable aléatoire X est le nombre réel qu'on le note $E(X)$, et on a :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n$$

Exemple

Dans l'application précédente on a : $E(X) = 0 \times \frac{2}{56} + 1 \times \frac{24}{56} + 2 \times \frac{30}{56} = \frac{84}{56}$.

b b.Variance et écart-type

D Définition

Soit X un variable aléatoire définie sur un univers Ω d'une expérience aléatoire tel que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Si on pose $p_i = P(X = x_i)$, alors le nombre réel positif :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$$

est appelé variance de la variable aléatoire X.

Et le nombre : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ est appelé écart-type de la variable aléatoire X.

Yassine Flamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Remarque

On a : $V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-E(X))^2=E(X^2)-(E(X))^2$ où $E(X^2)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2$.

Application

Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$ dans l'application précédente.

3 Loi binomiale

D — Définition

On considère une expérience aléatoire où on s'intéresse uniquement aux deux événements S (succès) de probabilité p et $\overline{S}$ (échec) de probabilité $(1-p)$. On répète dans les mêmes conditions et indépendamment n fois cette expérience.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X, qui est égale au nombre k de succès obtenus est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p. Cette loi est définie par :

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

pour $0\leq k\leq n$ $(k\in X(\Omega)=\{0,1,\ldots,n\})$.

Propriété

Soit X une variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètres n et p. Alors on a :

1. $E(x)=np$
2. $V(X)=np(1-p)$

Application

Une urne contenant 7 boules telles que 4 blanches et 3 noirs indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément deux boules de l'urne. Quelle est la probabilité de l'événement :
   A : "Obtenir deux boules de même couleurs"
2. On répète cette épreuve 5 fois avec les mêmes conditions de départ. Soit X la variable aléatoire qui fait associé chaque éventualité avec le nombre de fois d'obtenir deux boules de même couleurs.

Yassine Flamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

a Déterminer la loi de probabilité de X

b Déterminer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today