Chapitre

Transformation dans le plan

Cours 1AC

Les orientations pédagogiques 1	Capacités attendues
1 Rappel : symétrie axiale, symétrie centrale et translation ; 2 L'homothétie ; 3 Propriété caractéristique de la translation et celle de lhomothétie, cas de la symétrie centrale ; 4 Conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs ; 5 Distance et transformations précédentes ; 6 Images de certaines figures géométriques (segment, droite, demi-droite, cercle, angle).	1 Reconnaître les figures isométriques et les figures semblables à l'aide de la translation, de la symétrie axiale et l'homothétie. 2 Résoudre des problèmes géométriques à l'aide de la translation, de la symétrie axiale et l'homothétie.
Les Recommandations pédagogiques	**Les extensions**
1 On donnera un rappel de la symétrie axiale, la symétrie centrale et de la translation à partir d'activités et d'exercices, et on donnera les définitions vectorielle et affine de ces transformations ; 2 L'introduction de l'homothétie se fera, à partir d'exemples, de la même manière que les transformations précédentes ;	1 La logique ; 2 Les ensembles ; 3 Barycentre 4 Les applications ; 5 Groupe ; 6 Géométrie dans l'espace ; 7 Les nombres complexes

pace0.2cm

Yassine Elamri

I SYMÉTRIE CENTRALE- SYMÉTRIE AXIALE - TRANSLATION

1 Rappels

Activité

Soit $ABCD$ un losange de centre O et I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$.

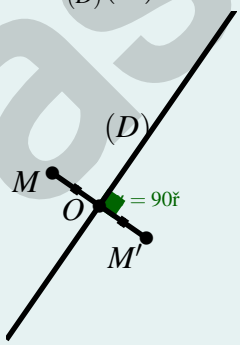
1. Construire une figure convenable.
2. a. Déterminer les symétriques des points A, B et O par rapport à O.
   b. En déduire le symétrique de la droite (AB) par rapport à O.
3. a. Déterminer les symétriques des points B, O et I par rapport à la droite (AC).
   b. En déduire le symétrique de la droite (OI) par rapport à la droite (AC).
4. a. Déterminer l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
5. a. Montrer que : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
   b. En déduire l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.
6. Déterminer l'image du segment $[BO]$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

2 Définitions

a Symétrie axiale

Définition

Soit (D) une droite dans plan.
La symétrie axiale d'axe (D) est la transformation plane qui, à tout point M du plan, associe l'unique point M' tel que la droite (D) soit la médiatrice du segment $[MM']$.
On dit que M' est l'image de M par La symétrie axiale d'axe (D) et on écrit : $M' = S_{(D)}(M)$.



Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

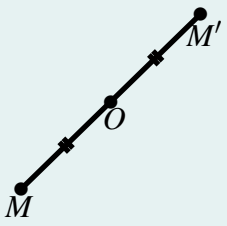
Remarque

Pour tout point M de (D), on a : $S_{(D)}(M) = M$.
On dit que tous les points de (D) sont invariants par la symétrie axiale d'axe (D).

b Symétrie centrale

Définition

Soit O un point du plan.
La symétrie centrale de centre O est la transformation plane qui, à tout point M du plan, associe l'unique point M' tel que le point O soit le milieu du segment $[MM']$.
On dit que M' est l'image de M par la symétrie centrale de centre O et on écrit : $M' = S_O(M)$.



Remarque

L'unique point invariant par la symétrie centrale est son centre.

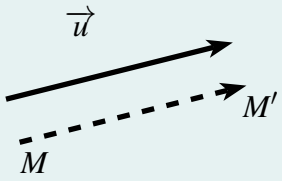
c Translation

Définition

La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation plane , à tout point M du plan, associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
On dit que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ et on écrit : $t_{\vec{u}}(M) = M'$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today



Remarque

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, la translation n'a aucun point invariant.
- Tous les points du plan sont invariants par la translation $t_{\vec{0}}$.

Application

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.
$ABCD$ est un quadrilatère du plan tel que B est l'image de A par la transaltion de vecteur $\vec{u}$ et D est l'image de C par la translation de vecteur $2\vec{u}$.

1. Montrer que : $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.
2. Soit I le molieu du segment $[CD]$. Montrer que $ABIC$ est un prallèlogramme.

II Homothétie

Activité

Soit OAB un triangle.

1. Construire les points M, N et P tels que : $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{ON} = -2\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$.
   On a $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA}$, on dit que M est limage de A par l'homothétie de cebtre O et de rapport $k = 2$.
2. Que représente le point N par rapport au point B et le point P par rapport au point A.
3. Construire le point Q l'image de B par l'homthétie de centre O et de rapport $k = -1$.

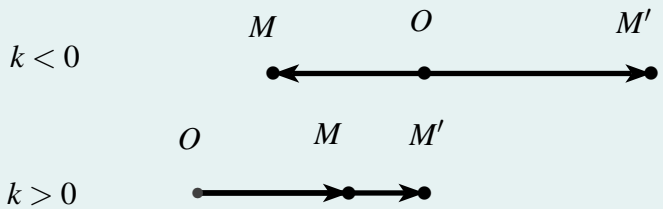
Définition

Soit O un point dans le plan et $k \in \mathbb{R}^*$.
L'homothétie de centre O et de rapport k est transformation du plan qui, à tout point M, associe l'unique point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

On dit que M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k et on écrit : $M' = h(M)$.



Remarque

Soit h une homothétie de centre O et de rapport k tel que $k \in \mathbb{R}^*$.

- Si $k = 1$, alors tous les points du plan sont invaraints par h.
- Si $k \neq 0$, alors le point O est le seul point invariant par h.
- Si $k = -1$, alors h est la symétrie centrale de centre O.
- Si $|k| > 1$, alors h est un grandissement de rapport $|k|$.
- Si $|k| < 1$, alors h est une réduction de rapport $|k|$.

Application

1. Exprimer vectoriellement la proposition suivante : B est l'image de C par l'homothétie h de centre A et de rapport $k = -\frac{3}{2}$.
2. Exprimer la relation vectorielle $\overrightarrow{JK} = \frac{5}{4}\overrightarrow{JL}$ par une homothétie.
3. Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h' qui transforme A en B dans les cas suivants :
   - $2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.
   - $\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

III Propriété caractéristique de : la translation - l'homothétie

1 Propriété caractéristique de la translation

Propriété

Soit T une transformation plane.

T est une translation si et seulement si pour tous M et N du plan, on a : $\overrightarrow{M'n'} = \overrightarrow{MN}$ tels que $T(M) = M'$ et $T(N) = N'$.

Conséquence

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation et M' et N' les images respectives de M et N par $t_{\vec{u}}$. on a :

- $M'N' = MN$. On dit que la translation conserve la distance.
- $(M'N')//(MN)$.

Application

Soit ABC un triangle et I un point du segment $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Construire B' et C' les images respectives de B et C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$.
2. Déterminer la nature du quadrilatère $BCC'B'$.

2 Propriété caractéristique de l'homothétie

Propriété

Soit T une transformation plane et $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

T et une homothétie de rapport k si et seulment si pour tous points M et N du plan, on a : $\overrightarrow{M'n'} = k\overrightarrow{MN}$ tels que $T(M) = M'$ et $T(N) = N'$.

Conséquence

Soit h une homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ et M' et N' les images respectives de M et N par h. on a :

- $M'N' = |k|MN$. On dit que l'homothétie ne conserve pas la distance.
- $(M'N')//(MN)$.

Application

$ABCD$ est un trapèze tel que : $(AB)//(CD)$ et $AB = \frac{1}{3}CD$.

1. Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h qui transforme A en D et transforme B en C.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h' qui transforme A en C et transforme B en D.

IV Prpriétés

1 Conservation de coefficient de colinéarité de deux valeurs

Propriété

Soit T une transformation plane et $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
Soient A, B, C et D tels que $A \neq B$ des points du plan et A', B', C' et D' leurs images respectives par T.
Si $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{C'D'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$.
On dit que les transformations usuelles conservent le coéfficient de colinéarité de deux vecteurs.

Conséquence

Soit T une transformation plane.

- Si A, B et C sont trois points alignés, alors leurs images respectives A', B' et C' sont aussi alignés.
- Si I est le milieu du segment $[AB]$ et A', B' et I' les images respectives par T de A, B et I, alors I' est le milieu du segment $[A'B']$.
- Les transformations conservent le parallèlisme de deux droites.

Application

ABC est un triangle et I le milieu de $[BC]$.
On considère les points B' et C' du plan définis par : $\overrightarrow{AB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et soit J le milieu de $[B'C']$.
À l'aide d'une homothétie, montrer que les points A, I et J sont alignés.

2 Conservation de la mesure d'un angle géométrique

Propriété

Soit T une transformation plane.
SOient A, B et C des points du plan et A', B' et C' ses images respectives par T. on a : $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$.
On dit que les transformation usuelles conservent la mesure d'un angle géométrique.

Conséquence

Les transformation usuelles conservent l'orthogonalité de deux droites.

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Application

$OABC$ est un rectangle.
On considère t la translation de vecteur $2\overrightarrow{OC}$.

1. Soient O', A', B' et C' les images respectives de O, A, B et C par t.
   Montrer que $O'A'B'C'$ est un rectangle.
2. On considère les points M et N du plan définis par : $\overrightarrow{OM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{O'N} = \frac{2}{5}\overrightarrow{O'A'}$.
   Montrer que : $CM = C'N$.

3 Conservation de l'intersection de deux droites

Propriété

Soit T une transformation plane.
Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en A et (D') et (Δ') leurs images respectives par T.alors :
Les droites (D') et (Δ') sont sécantes.
On dit que les transformations usuelles conservent l'intersection de deux droites.

Application

$ABCD$ est un parallèlogramme. I un point de $[BD]$ différent de B et D. J est l'intersection de (AI) et (BC) et K est l'intersection de (AI) et (CD).
On considère h l'homothétie de centre I et transforme B en D.

1. Faire une figure.
2. Déterminer $h(A)$ et $h(J)$.
3. Montrer que : $IA^2 = IJ \times IK$.

4 Image d'un cercle par une transformation plane

Propriété

- Soit T une transforamtion plane différente à une homothétie.
  L'image du cercle $C(I,\mathbb{R})$ de centre I et de rayon R par T est le cercle cercle $C(I',\mathbb{R})$ tel que $T(I) = I'$.
- Soit h une homothétie de rapport k tel que $k \in \mathbb{R}^*$.
  L'image du cercle $C(I,\mathbb{R})$ de centre I et de rayon R par h est le cercle cercle $C(I',|k|\mathbb{R})$ tel que $T(I) = I'$.

Application

$ABCD$ est un parallèlogramme et I et J sont deux points du plan tels que : $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC}$.

1. Construire une figure convenable.
2. Montrer que la droite (BJ) est l'image de la droite (AI) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Soit h l'homthétie de centre I et transforme B en C.
   a. Montrer que $h((AB)) = (CD)$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

b Montrer que le rapport de h est $k = -2$.

c Soit K l'image de J par h. Montrer que : $\overrightarrow{KI} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CK}$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today