ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Normal juin 2016

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux et un problème répartis suivant les domaines comme suit :

- Exercice 1 : **Suites numériques** ..... **2.5 points**
- Exercice 2 : **Géométrie dans l'espace** ..... **3 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **Calcul des probabilités** ..... **3 points**
- Problème : **Etude dune fonction numérique et calcul intégral** ..... **8.5 points**

♠ On désigne par $|z|$ le module du nombre complexe z et par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z

♠ **ln** désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (2.5 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{3+u_n}{5-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 - Vèrifier que : $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis montrer par récurrence que $u_n < 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$. — **0,75 pt**

2 - Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{3 - u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et en déduire que $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. — **0,75 pt**

b) Montrer que $u_n = \dfrac{1+3v_n}{1+v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis exprimer (u_n) en fonction de n. — **0,5 pt**

c) Déterminer la limite de la suite (u_n). — **0,5 pt**

Exercice 2 : (3 pts)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(2,1,3)$, $B(3,1,1)$ et $C(2,2,1)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$$

1 - a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. — **0,5 pt**

b) En déduire que $2x + y + z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC). — **0,5 pt**

2 - a) Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,-1,0)$ et son rayon est 6. — **0,5 pt**

b) Montrer que $d(\Omega,(ABC)) = 3$ et en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ). — **0,5 pt**

3 - a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC) — **0,5 pt**

b) Montrer que le centre du cercle (Γ) est le point B. — **0,5 pt**

Exercice 3 : (3 pts)

1 - Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : — **0,75 pt**

$$z^2 - 4z + 29 = 0$$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les points Ω, A et B d'affixes respectives : $\omega = 9 + i$, $a = 5 + 2i$ et $b = 5 + 8i$

a) Soit u le nombre complexe tel que : $u = b - \omega$. — **0,75 pt**

Vérifier que $u = 3 + 3i$ puis montrer que $\arg u \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

b) Déterminer un argument du nombre complexe $\overline{u}$ ($\overline{u}$ étant le conjugué de u). — **0,25 pt**

c) Vérifier que $a - \omega = \overline{u}$ puis en déduire que : $\Omega A = \Omega B$ et $\arg\left(\dfrac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. — **0,75 pt**

Yassine Elamri

0,5 pt **d)** On considère la rotation $\boldsymbol{R}$ de centre $\boldsymbol{\Omega}$ et d'angle $\boldsymbol{2\pi}$.

Déterminer l'image du point $\boldsymbol{A}$ par la rotation $\boldsymbol{R}$.

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient **10** boules : quatre boules rouges et six boules vertes. (les boules sont indiscernables au toucher).

On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1 pt **1 -** Soit $\boldsymbol{A}$ l'évènement :≪ les deux boules tirées sont rouges≫.
Montrer que $\boldsymbol{p(A) = \frac{2}{15}}$.

2 - Soit $\boldsymbol{X}$ la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le nombre de boules rouges restantes dans l'urne.

0,5 pt **a)** Montrer que l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ est $\boldsymbol{\{2,3,4\}}$.

1,5 pt **b)** Montrer que $\boldsymbol{p(X=3) = \frac{8}{15}}$ puis déterminer la loi de probabilité de $\boldsymbol{X}$.

Problème : (8.5 pts)

On considère la fonction numérique $\boldsymbol{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = 2x - 2 + e^2x - 4e^x}.$$

et soit $\boldsymbol{(C_f)}$ la courbe représentative de la fonction $\boldsymbol{f}$ dans un repère orthonormé $\boldsymbol{(O;\vec{i};\vec{j})}$ (unité : $\boldsymbol{1cm}$). **partie I :**

0.25 pt **1 - a)** Montrer que $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

b) Montrer que la droite $\boldsymbol{(D)}$ d'équation $\boldsymbol{y = 2x - 2}$ est une asymptote à la courbe $\boldsymbol{(C_f)}$

0.5 pt au voisinage de $\boldsymbol{-\infty}$

0.5 pt **2 - a)** Montrer que $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

0.5 pt **b)** Montrer que $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0.5 pt **3 - a)** Montrer que $\boldsymbol{f'(x) = 2(e^x - 1)^2}$ pour tout $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}$.

0.25 pt **b)** Dresser le tableau de variations de la fonction $\boldsymbol{f}$ sur $\mathbb{R}$. (remarquer que $\boldsymbol{f'(0) = 0}$).

0.75 pt **c)** Montrer qu'il existe un unique réel $\boldsymbol{\alpha}$ de l'intervalle $\boldsymbol{]1, \ln 4[}$ tel que : $\boldsymbol{f(\alpha) = 0}$.

4 - a) Montrer que la courbe $\boldsymbol{(C_f)}$ est au-dessus de la droite $\boldsymbol{(D)}$ sur l'intervalle $\boldsymbol{]\ln 4, +\infty[}$

0.5 pt et qu'elle est en-dessous de la droite $\boldsymbol{(D)}$ sur l'intervalle $\boldsymbol{]-\infty, \ln 4[}$.

0.5 pt **b)** Montrer que la courbe $\boldsymbol{(C_f)}$ admet un seul point d'inflexion de coordonnées $\boldsymbol{(0,-5)}$.

0.75 pt **c)** tracer la droite $\boldsymbol{(D)}$ et la courbe $\boldsymbol{(C_f)}$ dans le même repère $\boldsymbol{(O;\vec{i};\vec{j})}$.

(on prendra $\boldsymbol{\ln 4 \approx 1,4}$ et $\boldsymbol{\alpha \approx 1,3}$).

0.5 pt **5 - a)** Montrer que $\boldsymbol{\int_0^{\ln 4} (e^2x - 4e^x)dx = -\frac{9}{2}}$.

Yassine Elamri

b) Calculer en $\mathbf{cm^2}$, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 4$. — **0,5 pt**

partie II :

1 - a) Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' - 3y' + 2y = 0$. — **0,5 pt**

b) Déterminer la solution g de l'équation (E) qui vérifie les deux conditions : $g(0) = -3$ et $g'(0) = -2$. — **0,5 pt**

2 - Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x).$$

a) Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} et que h^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$. — **0,75 pt**

b) Vérifier que $h(\ln 5) = \ln 5$ puis déterminer $(h^{-1})'(\ln 5)$. — **0,75 pt**

Yassine Elamri

FIN