CHAPITRE 12 : DÉNOMBREMENT ET PROBABILITÉS

- www.steinmaaths.com
- Classe : 2Bac Sciences Expérimentales (SP& SVT)
- Année scolaire : 2021/2022

CAPACITÉS ATTENDUES

— Calculer la probabilité de la réunion de deux événements ; la probabilité de l'intersection de deux événements et le calcul de la probabilité de l'événement contraire.
— Utiliser la probabilité conditionnelle pour déterminer la probabilité de l'intersection de deux événements.
— Utiliser le modèle de dénombrement selon la situation étudiée.
— Reconnaitre l'indépendance et la compatibilité des événements.
— Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
— Reconnaitre et appliquer la loi binomiale à des situations dans des disciplines de la spécialité.

PLAN DU COURS

1 Dénombrement **2**
1.1 Vocabulaire des ensembles . . . 2
1.2 Cardinal d'un ensemble . . . 2

2 factorielle *n* **3**
2.1 Le principe fondamental du dénombrement . . . 3
2.2 Arrangement avec répétition - sans répétition . . . 4
2.2.1 Définition . . . 4
2.2.2 Arrangement avec répétition . . . 4
2.2.3 Arrangement sans répétition . . . 4
2.3 Permutations ; la notation ***n!*** . . . 5
2.4 Combinaisons ; la notation C_n^p . . . 5

3 Vocabulaire des probabilités **6**

4 Probabilités sur un ensemble fini **8**
4.1 Loi de probabilité . . . 8
4.2 Le cas où les évènements élémentaires sont équiprobables . . . 9
4.3 Arbre de probabilités . . . 10

5 Probabilités conditionnelles **14**

6 Indépendance de deux évènements **16**

7 Variable aléatoire **16**

8 Loi binomial **17**

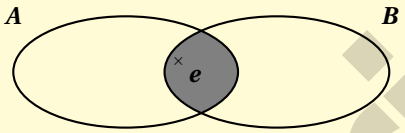
Yassine Elamri

1. Dénombrement

1.1 Vocabulaire des ensembles

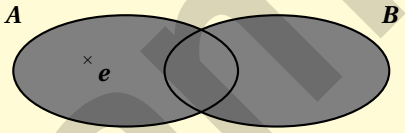
Définition : Intersection

L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B. On la note $A \cap B$.
Ainsi $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ et $e \in B$.
Remarque : Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.



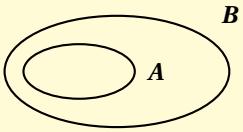
Définition : Réunion

La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B. On la note $A \cup B$.
Ainsi $e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ ou $e \in B$.



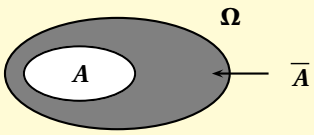
Définition : Inclusion

On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B.
On note alors $A \subset B$ (" A inclus dans B") ou $B \supset A$ (" B contient A").
On dit alors que A est une partie de B ou que A est un sous-ensemble de B.



Définition : Complémentaire

Soit Ω un ensemble fini et A une partie de Ω.
Le complémentaire de A dans Ω est l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A. On le note $\bar{A}$.
Remarque : $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \varnothing$.



Définition : Différence

Soit Ω un ensemble fini et A et B deux parties de Ω.
On appelle différence A moins B, noté $A \setminus B$, l'ensemble :
$A \setminus B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ et } x \notin B\}$.

1.2 Cardinal d'un ensemble

Définition

Le cardinal d'un ensemble fini Ω est le nombre des éléments de cet ensemble et on le note : $\mathbf{Card}\,\Omega$
Cas particulier : $\mathbf{Card}\,\varnothing = \mathbf{0}$
Remarque : La notion de cardinal ne s'applique pas aux ensembles infinis (comme $\mathbb{R}$).

Propriété

Soient Ω un ensemble fini, A et B deux parties de Ω.

1 A et B sont disjoints $\Leftrightarrow \mathbf{Card}(A \cup B) = \mathbf{Card}(A) + \mathbf{Card}(B)$.

Yassine Elamri

2 $\mathbf{Card}(A \setminus B) = \mathbf{Card}(A) - \mathbf{Card}(A \cap B)$

3 $\mathbf{Card}(A \cup B) = \mathbf{Card}(A) + \mathbf{Card}(B) - \mathbf{Card}(A \cap B)$

4 $\mathbf{Card}(\overline{A}) = \mathbf{Card}(\Omega) - \mathbf{Card}(A)$

5 Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de parties de Ω **deux à deux disjointes**, alors

$$\mathbf{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Card}(A_i)$$

2. factorielle n

Définition

Étant donné un entier naturel n on désigne par $n!$ qui se lit **factorielle** n l'entier naturel défini par : $0! = 1$ et $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ pour $n \geqslant 1$

2.1 Le principe fondamental du dénombrement

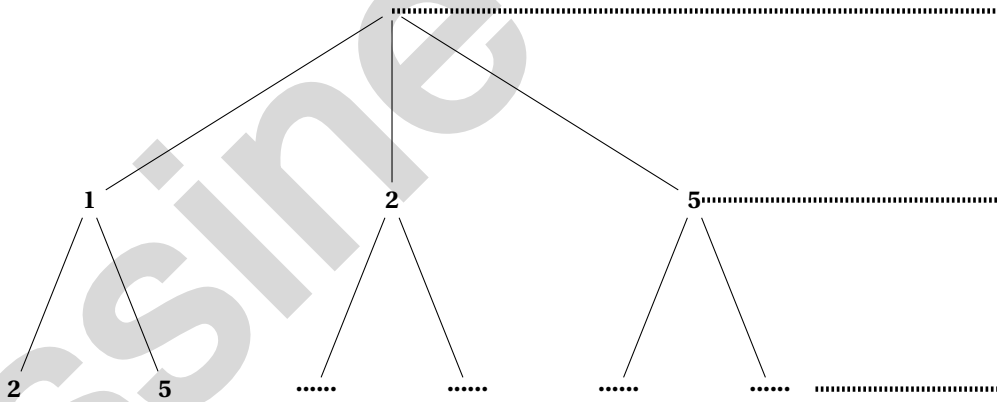
Activité 1

1 On veut former des nombres de deux chiffres distincts par les chiffres : 1 et 2 et 5 .

a. Écrire deux nombres dont le chiffre de dizaines est 5 .

b. Combien de nombres pairs peut-on former ?

c. Compléter l'arbre suivant puis déterminer combien de nombres peut-on former :



2 On considère une expérience aléatoire de p choix $(p \geq 2)$ tels que le premier choix peut produire n_1 résulta le second choix peut produire n_2 résultats, ... et le p-ième choix peut produire n_p résultats.

a. Quel est le nombre de possibilités pour effectuer les deux premiers choix ?

b. Quel est le nombre de possibilités pour effectuer les trois premiers choix ?

c. En déduire que le nombre de choix possibles est : $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$.

Énoncé du principe

Si une opération globale peut se décomposer en p opérations élémentaires successives $(p \in \mathbb{N}^*)$, ces dernières pouvant s'effectuer respectivement de $n_1; n_2; \ldots; n_p$ manières différentes, alors l'opération globale peut se faire de :
$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_p$ manières différentes.

Yassine Elamri

2.2 Arrangement avec répétition - sans répétition

2.2.1 Définition

Définition

On appelle arrangement de p éléments de E, tout p-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ d'éléments de E deux à deux distincts $(1 \leq p \leq n)$.

2.2.2 Arrangement avec répétition

Activité 2

1 Une boite contient 3 jetons numérotées de 1 à 3 . On tire un jeton de la boite, on inscrit son numéro (par exemple 3), puis on le remet dans la boite ; on tire un jeton, une deuxième fois, on inscrit son numéro (par exemple 1) ; on obtient donc deux numéros ordonnés : le 1^{ier} est 3 et le $2^{\text{ième}}$ est 3, on le note $(3;1)$.

a Copier et compléter le tableau suivant :

Choix du $2^{\text{ième}}$ jeton / Choix du 1^{ier} jeton	1	2	3
1			
2		$(2;2)$	
3	$(3;1)$		

b De combien de façons, peut-on choisir le 1^{ier} jeton ?

c De combien de façons, peut-on choisir le $2^{\text{ième}}$ jeton ?

d En déduire le nombre de façons de choisir les deux jetons parmi 3 (un après un).

2 Une autre boite contient n jetons numérotés de là n (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

On tire un jeton, on inscrit son numéro, puis on le remet dans la boite ; on tire une deuxième fois, un jeton, on inscrit son numéro et on le remet dans la boite : .. et ainsi de suite, on tire un jeton pour la $p^{\text{ième}}$ fois de la boite $(p \in \mathbb{N}^*)$.

Déterminer le nombre de façons de choisir les p jetons parmi n (un après un).

Propriété

Soit n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$ $(p \leq n)$

Le nombre d'arrangement avec répétition, de p éléments parmi n, est : n^p

2.2.3 Arrangement sans répétition

Propriété

Soit n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$ $(p \leq n)$

Le nombre d'arrangement sans répétition, de p éléments parmi n, est :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}_{p\text{-facteurs}} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Yassine Elamri

2.3 Permutations ; la notation $n!$

Définition

Tout classement ordonné de n éléments distincts est une permutation de ces n éléments. Par exemple $aebcd$ est une permutation des éléments a, b, c, d, e.

Propriété

Le nombre de permutations de n éléments peut être calculé de la façon suivante : il y a n places possibles pour un premier élément, $n-1$ pour un deuxième élément, ..., et il ne restera qu'une place pour le dernier élément restant.
On remarque facilement alors qu'il y a $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$ permutations possibles.
Il y a donc $n!$ permutations de n éléments distincts.

Propriété

Le nombre de permutations que l'on peut constituer si certains des éléments sont identiques est plus petit que si tous les éléments sont distincts.

2.4 Combinaisons ; la notation C_n^p

Définition

Soit Ω un ensemble de cardinal n et p un entier naturel. On appelle **combinaison** de p éléments de Ω un sous-ensemble de Ω contenant p éléments.
Une combinaison est donc une collection de p objets pris simultanément parmi n, donc sans tenir compte de l'ordre d'apparition.

Propriété

Si l'on permute les éléments de chaque combinaison simple, on obtient tous les arrangements simples. Il y a donc $p!$ fois plus d'arrangements que de combinaisons.
Donc le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Type de tirage : Récapitulation

Type de tirage	Successif avec remise	Successif sans remise	Simultané
Ordre	Avec ordre	Avec ordre	Sans ordre
Un cas possible	un p-uplet avec possibilité de répétition	un p-uplet d'éléments distincts	une partie de p éléments
Card Ω	n^p	A_n^p	C_n^p

Exercice d'application 1

Combien de mots de 4 lettres peut-on former avec notre alphabet de 26 lettres :

1. avec répétition des lettres ?
2. sans répétition des lettres ?

(On admet que les mots ainsi formés peuvent ne pas avoir de sens.)

Yassine Elamri

Exercice d'application 2

On veut constituer un nombre de 5 chiffres en utilisant les chiffres **5;6;7;8;9** sans qu'il y ait deux ou plusieurs chiffres identiques.

1. Combien peut-on former de nombres ?
2. Combien ***y*** en a-t-il qui ont le chiffre 9 comme chiffre des centaines ?
3. Combien y en a-t-il qui commencent par 56 ?

Exercice d'application 3

Dix personnes sont assises autour d'une table ronde.
De combien de façons peut-on disposer ces personnes :

1. lorsque les chaises sont numérotées ?
2. lorsque les chaises ne sont pas numérotées ?

Exercice d'application 4

Une équipe de football est constituée de 11 joueurs. Combien d'équipes de football peut-on composer lorsqu'il faut choisir les joueurs parmi 20 personnes ?

3. Vocabulaire des probabilités

Définition

- Une **expérience** est dite **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs issues (ou résultats) possibles, toutes connues, et que l'on ne peut ni prévoir, ni calculer laquelle de ces issues sera réalisée.
- On appelle **univers**, noté en général $\boldsymbol{\Omega}$, l'ensemble des issues ou résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- Un **événement** est une partie de l'univers, c'est-à-dire une condition qui peut être réalisée par une ou plusieurs issue(s) d'une expérience.
- Un **événement élémentaire** est un événement qui ne contient qu'un seul élément.
- Lorsque un évènement est l'ensemble vide, on l'appelle évènement impossible ;
- Lorsque un cet évènement est l'ensemble $\boldsymbol{\Omega}$, on l'appelle évènement certain.
- Deux événements sont dits incompatibles s'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément.

Exemple

On lance un dé à six faces et on s'intéresse au nombre obtenu sur la face supérieure.
Les résultats possibles sont les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 : l'univers est l'ensemble $\boldsymbol{\Omega} = \{\mathbf{1,2,3,4,5,6}\}$.
$\boldsymbol{E_1}$="Obtenir un 6", $\boldsymbol{E_2}$="Obtenir un nombre pair", et $\boldsymbol{E_3}$="Obtenir un nombre supérieur ou égal à 4" sont des événements qui peuvent s'écrire $\boldsymbol{E_1} = \{\mathbf{6}\}$, $\boldsymbol{E_2} = \{\mathbf{2,4,6}\}$ et $\boldsymbol{E_3} = \{\mathbf{4,5,6}\}$.
$\boldsymbol{E_1}$ est de plus un événement élémentaire.

Définition

- On appelle **événement contraire** de l'événement A, l'événement noté $\overline{\boldsymbol{A}}$ contenant tous les éléments de l'univers $\boldsymbol{\Omega}$ ne se trouvant pas dans A.
- On appelle **réunion** de A et B, l'événement noté $\boldsymbol{A \cup B}$ contenant tous les éléments de A et tous ceux de B.
- On appelle **intersection** de A et B, l'événement noté $\boldsymbol{A \cap B}$ contenant les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.
- Deux événements sont dits **incompatibles** lorsque leur intersection est vide, c'est-à-dire lorsqu'ils ne peuvent

Yassine Elamri

être réalisés simultanément.

Exemple

On lance deux dés et on considère la somme S obtenue.

L'univers des possible est $\Omega = \{2;3;\cdots;11;12\}$.

Le tableau suivant définit le vocabulaire relatif aux événements (en probabilité) :

Vocabulaire	Signification	Illustration
Événement élémentaire (noté ω)	L'une des issues de la situation étudiée (un élément de Ω)	Obtenir 7 : $\omega = \{7\}$
Événement impossible (noté $\varnothing$)	C'est un événement qui ne peut pas se produire	« Obtenir 13 » est un événement impossible.
Événement certain (noté Ω)	C'est un événement qui se produira obligatoirement	« Obtenir entre 2 et 12 » est un événement certain.
Événement (notation quelconque)	Ensemble de plusieurs issues	Obtenir un nombre pair : $A = \{2;4;6;8;10;12\}$ Obtenir un multiple de trois : $B = \{3;6;9;12\}$ Obtenir une somme supérieure à 10 : $C = \{10;11;12\}$ Obtenir une somme inférieure à 6 : $D = \{2;3;4;5;6\}$
Événement « A et B »(noté $A \cap B$)	Événement constitué des issues communes aux 2 événements	$A \cap B = \{6;12\}$
Événement « A ou B »(noté $A \cup B$)	Événement constitué de toutes les issues des deux événements	$A \cup B = \{2;3;4;6;8;9;10;12\}$
Événements incompatibles (on note alors $A \cap B = \varnothing$)	Ce sont des événements qui n'ont pas d'éléments en commun	$C \cap D = \varnothing$ donc C et D sont incompatibles. Par contre, A et B ne le sont pas.

Yassine Elamri

Événements contraires (noté $\overline{A}$)	Ce sont deux événements incompatibles dont la réunion forme la totalité des issues (Ω)	Ici, $\overline{A}$ représente l'événement « obtenir une somme impaire ». On a alors : — $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (ensembles disjoints) — $A \cup \overline{A} = \Omega$

Exemple

Dans un jeu de 32 cartes, on en tire une au hasard.
L'univers est constitué de 32 événements élémentaires.
L'événement : E="Tirer un roi" est-il un événement élémentaire ?

Exemple

Dans un jeu de 32 cartes, on considère les événements : A="tirer un cœur", B="tirer un dix" et C="tirer une figure".
Décrire les événements : $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cap C$.

Exemple

J'achète trois billets de tombola. Quel est le contraire de l'événement *"tous mes billets sont gagnants"*?

Exemple

Dans le cas du lancer de dé, si A est l'événement : A ="Obtenir un nombre impair", c'est-à-dire $A = \{1,3,5\}$, alors son événement contraire est $\overline{A} = \ldots$
Soit E l'événement "Obtenir un 3 ou un 5", c'est-à-dire si $E = \{3,5\}$, alors
$\overline{E} = \ldots$ $A \cup E = \ldots$ $A \cap E = \ldots$

4. Probabilités sur un ensemble fini

4.1 Loi de probabilité

Introduction : On tire une boule dans une urne contenant 2 boules blanches, 1 noire, 4 vertes, 5 rouges, et on regarde sa couleur. Si on répète cette expérience, la fréquence avec laquelle on obtient une boule rouge se stabilise peu à peu sur une valeur, égale ici à **5/12**.
On dit couramment qu'on a 5 chances sur 12 de tirer une boule rouge. Dans le cadre d'un modèle mathématique de cette expérience aléatoire, on dira que l'évènement "tirer une boule rouge" a la probabilité **5/12**.
Plus généralement, dans un modèle probabiliste, chaque évènement est pondéré par un nombre compris entre 0 et 1 , sa probabilité.
Ces probabilités doivent respecter certaines règles de compatibilité, naturelles si on les interprète en termes de "nombre de chances sur 100". L'additivité est la principale de ces règles.
Appliquée à un cas particulier dans notre exemple, elle exprime simplement que, puisqu'on a 5 chances sur 12 de tirer une boule rouge et 2 chances sur 12 de tirer une blanche, on a $5+2$ chances sur 12 de tirer une boule soit rouge soit blanche.
L'autre règle dit seulement que si on tire une boule, on a **100%** de chances de ...tirer une boule...

Définition

Soit $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble fini.
On définit une **loi de probabilité** sur Ω si on choisit des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tels que, pour tout $i, 0 \leqslant p_i \leqslant 1$ et

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.
p_i est la probabilité élémentaire de l'événement $\{a_i\}$ et on note $p_i = p(\{a_i\})$ ou parfois plus simplement $p(a_i)$.

pour tout événement E inclus dans Ω, on définit $p(E)$ comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui définissent E.

Propriété

Parties de Ω	Vocabulaire des événements	Propriété
A	A quelconque	$0 \leqslant p(A) \leqslant 1$
$\varnothing$	Evénement impossible	$p(\varnothing) = 0$
Ω	Evénement certain	$p(\Omega) = 1$
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont incompatibles	$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
$\bar{A}$	$\bar{A}$ est l'événement contraire de A	$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
A, B	A et B quelconques	$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

4.2 Le cas où les évènements élémentaires sont équiprobables

Définition

On dit qu'il y a **équiprobabilité** quand tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Propriété

Dans une situation d'équiprobabilité, si Ω a n éléments et si E est un événement composé de m événements élémentaires :
$p(E) = \dfrac{\text{Card}\, E}{\text{Card}\, \Omega}$ où $\text{Card}\, E$ et $\text{Card}\, \Omega$ désignent respectivement le nombre d'éléments de E et de Ω.
On le mémorise souvent en disant que c'est **le nombre de cas favorables** divisé par **le nombre de cas possibles**.

Remarque

Les expressions suivantes " dé équilibré ou parfait ", "boule tirée de l'urne au hasard", " boules indiscernables "... indiquent que, pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité.

Exemple

Dans l'expérience de lancer de dé, la probabilité de l'événement A="obtenir un nombre pair"$=\mathbf{2,4,6}$ est :

$$P(A) = P(\{2\}) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Exemple

On lance deux dés équilibrés et on s'intéresse à la somme des deux dés.
L'univers est $\Omega = \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$ mais il n'y a pas équiprobabilité car chaque évènement n'a pas la même probabilité. Ainsi il est plus difficile d'obtenir 2 que 7 .
On se ramène à une situation d'équiprobabilité : chaque dé étant équilibré, on a équiprobabilité sur chaque dé (chaque face a une probabilité de $\frac{1}{6}$).
Il reste à déterminer la façon d'obtenir chaque somme.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Le tableau ci-dessous résume les possibilités pour chaque dé et la somme obtenue :

dé 2 / dé 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Chaque "case" $\boldsymbol{n}$ étant équiprobable $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}\right)$ on obtient :

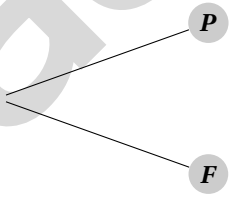
ω_i	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	Total
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	**1**

4.3 Arbre de probabilités

On a l'habitude de visualiser toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire à l'aide d'un arbre, appelé **arbre des possibles**.

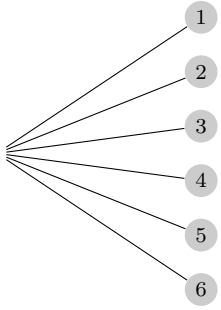
Expérience 1

On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure.
On note $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{F}$ les issues "pile" et "face" respectivement.
On construit alors l'arbre suivant :



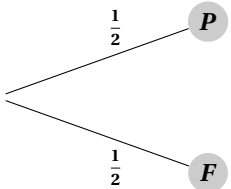
Expérience 2

On jette un dé et on observe la face supérieure.
Les issues de cette expérience aléatoire sont les nombres : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.
On construit alors l'arbre suivant :



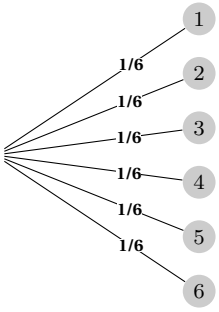
On peut aussi indiquer sur chaque branche de l'arbre les probabilités des événements élémentaires correspondants à chacune des issues possibles : l'arbre est alors un **arbre de probabilités** ou un **arbre pondéré**.

Expérience 1

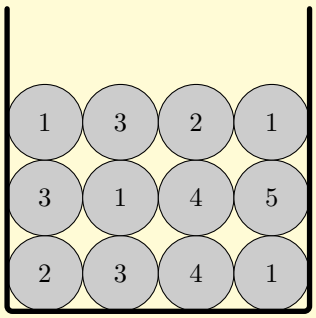


Yassine Elamri

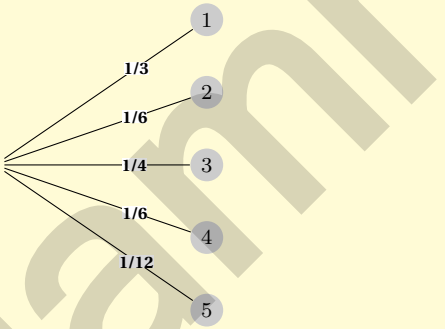
Expérience 2



Exemple



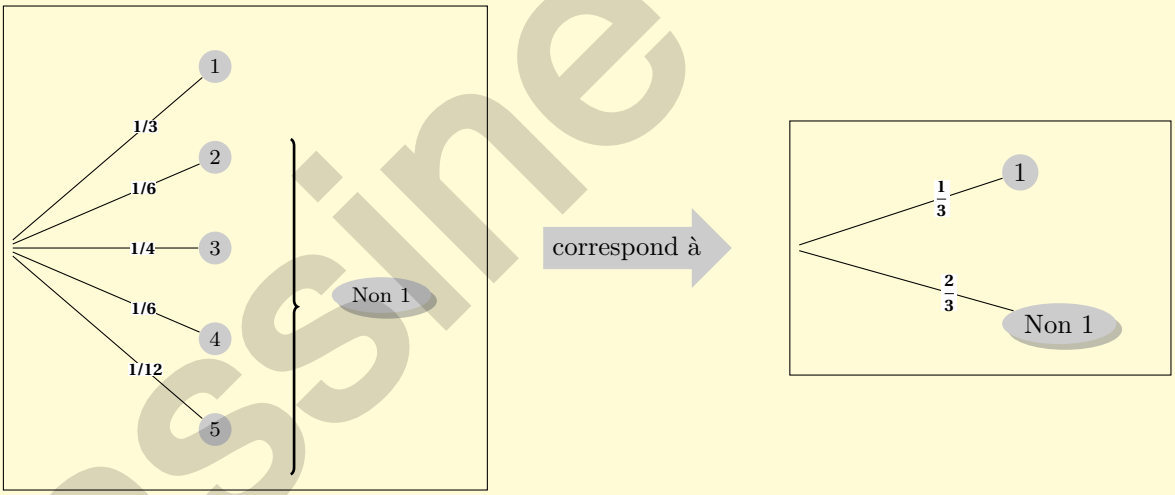
Urne contenant 12 boules numérotées de **1** à **5**



Arbre pondéré de l'expérience : "on tire une boule et on lit son numéro"

On se donne une urne dans laquelle sont placées **12** boules indiscernables au touché et toutes marquées d'un numéro de **1** à **5**.

Considérons l'événement ***A*** :"la boule tirée ne porte pas le numéro 1"



Utilisation d'un arbre pondéré

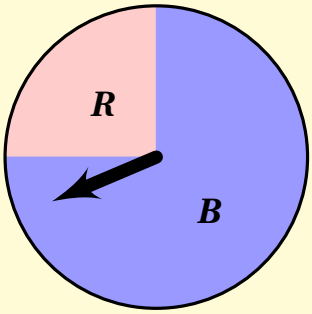
Additionnons les probabilités des différentes issues autres que 1 : $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

On a donc $P(A)=\frac{2}{3}$ qui est la probabilité que la boule tirée ne porte pas le numéro 1.

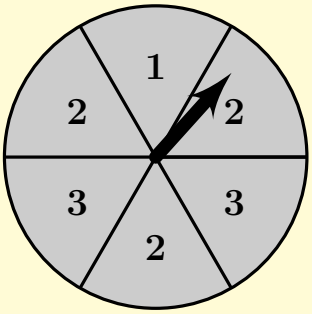
Exemple

Expérience en deux étapes

Yassine Elamri



Roue numéro 1

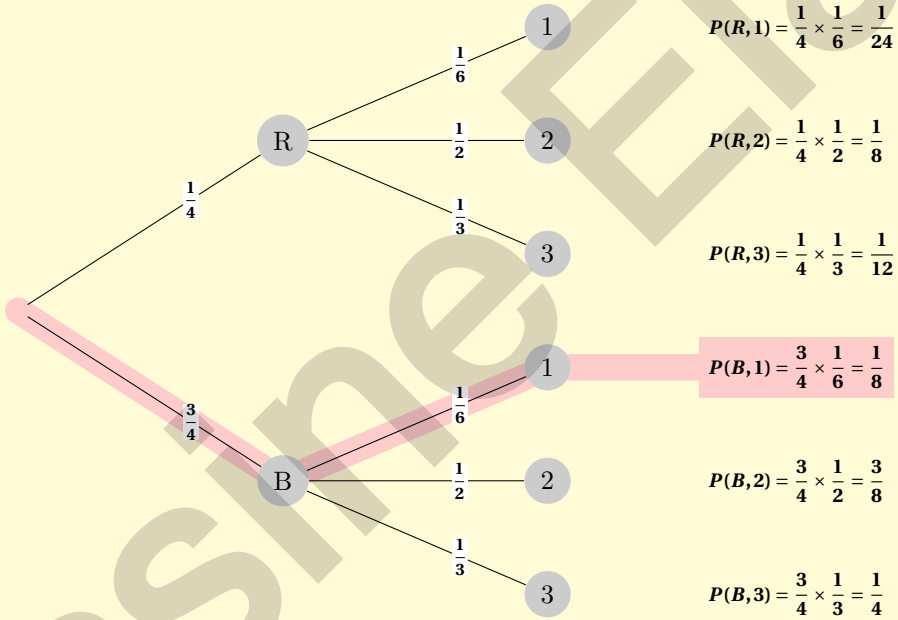


Roue numéro 2

On considère l'expérience suivante, qui se déroule en deux étapes :

Étape 1 – D'abord, on fait tourner une première roue de loterie : on obtient la couleur "rouge", notée $\boldsymbol{R}$, avec une probabilité de $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ et la couleur "bleu", notée $\boldsymbol{B}$ avec une probabilité de $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$.

Étape 2 – Ensuite, on fait tourner une deuxième roue de loterie : on obtient le numéro 1 avec la probabilité $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$, le numéro 2 avec la probabilité $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ et le numéro 3 avec la probabilité $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$.



Arbre pondéré de l'expérience à deux épreuves (avec les calculs de probabilités pour chaque branche)

Un arbre pondéré permet :

- de déterminer tous les issues possibles à la fin de ces deux étapes.
  Les issues possibles peuvent être notées ainsi : $(\boldsymbol{R,1})$, $(\boldsymbol{R,2})$, $(\boldsymbol{R,3})$, $(\boldsymbol{B,1})$, $(\boldsymbol{B,2})$, $(\boldsymbol{B,3})$. Chacune de ces issues est représentée dans l'arbre de la figure **??** par la succession de deux branches.
- de calculer la probabilité d'obtenir chacune des six issues possibles à la fin des deux étapes.

Comment évaluer la probabilité de l'issue $(\boldsymbol{B,1})$ par exemple ?

On repère le chemin menant à l'issue $(\boldsymbol{B,1})$ (surligné sur la figure) : sur la première branche, il y a une probabilité de $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ et sur la deuxième, une probabilité de $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$. Donc, on en déduit que :

$$\boldsymbol{P(B,1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{4 \times 6} = \frac{1}{8}}$$

On a utilisé la propriété suivante (admise).

Yassine Elamri

Propriété

Dans un arbre, la probabilité de l'issue auquel conduit un chemin est égal au **produit** des probabilités rencontrées le long de ce chemin.

Exercice d'application 5

On considère l'ensemble E des entiers de 20 à 40 . On choisit l'un de ces nombres au hasard.

- ***A*** est l'événement : " le nombre est multiple de 3 "
- ***B*** est l'événement : " le nombre est multiple de 2 "
- ***C*** est l'événement : " le nombre est multiple de **6**".

Calculer $p(A), p(B), p(C), p(A \cap B), p(A \cup B), p(A \cap C)$ et $p(A \cup C)$.

Exercice d'application 6

On lance deux fois de suite un dé équilibré.

1 Représenter dans un tableau les 36 issues équiprobables.

2 Calculer la probabilité des événements :

a ***A*** : " on obtient un double "

b ***B*** : " on obtient 2 numéros consécutifs "

c ***C*** : " on obtient au moins un **6**"

d ***D*** : " la somme des numéros dépasse **7** "

Exercice d'application 7

On lance **4** fois de suite une pièce équilibrée.

1 Dresser la liste des issues équiprobables.

2 On considère les événements suivants :

A : " 2 piles et 2 faces " et ***B*** : " 3 piles et 1 face ou 3 faces et 1 pile "

Quel est l'événement le plus probable : ***A*** ou ***B*** ?

Exercice d'application 8

Une urne contient six boules rouges et trois boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).

1 On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

a Calculer la probabilité de tirer deux boules rouges et une verte.

b Montrer que la probabilité de tirer une boule verte au moins est $\frac{16}{21}$.

2 On considère dans cette question l'épreuve suivante : On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.

Calculer la probabilité de tirer trois boules rouges.

Session Normale 2008

Exercice d'application 9

Une urne contient quatre boules blanches et trois boules rouges. (les boules sont indiscernables au toucher). On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.

1 Quelle est la probabilité de tirer trois boules blanches ?

2 Montrer que la probabilité de tirer trois boules de même couleur est $\frac{1}{7}$.

Yassine Elamri

3 Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au moins ?

Session Rattrapage 2008

5. Probabilités conditionnelles

Activité 3

On dispose d'une urne opaque contenant des boules indiscernables au toucher. Deux tiers des boules sont noires et un tiers des boules sont blanches. On procède au tirage aléatoire de manière successive de deux boules et on s'intéresse au nombre de boules blanches obtenues.

Partie A : Cas où l'urne contient trois boules.

On donnera les résultats arrondis au millième au besoin.

1 On procède à un tirage avec remise (on remet la première boule obtenue dans l'urne avant de procéder au second tirage).

- **a** Construire un arbre pondéré correspondant à cette situation aléatoire.
  Quel est le nom de cette situation ?
- **b** Déterminer la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

2 On procède à un tirage sans remise (on ne remet pas la première boule obtenue dans l'urne avant de procéder au second tirage).

- **a** Construire un arbre pondéré correspondant à cette situation aléatoire.
  Est-ce la même situation que dans le cas précédent ?
- **b** Déterminer la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.
  La loi est-elle identique à celle du cas précédent ?

Partie B : Cas où l'urne contient trois cents boules.

On donnera les résultats arrondis au millième au besoin.

1 On procède à un tirage avec remise (on remet la première boule obtenue dans l'urne avant de procéder au second tirage).

- **a** Construire un arbre pondéré correspondant à cette situation aléatoire.
- **b** Déterminer la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

2 On procède à un tirage sans remise (on ne remet pas la première boule obtenue dans l'urne avant de procéder au second tirage).

- **a** Construire un arbre pondéré correspondant à cette situation aléatoire.
- **b** Déterminer la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

3 Que peut-on dire de ces deux lois ?

Activité 4

Les données du tableau ci-dessous sont celles de l'année scolaire pour les Premières Bac à un lycée de 2015–2016 :

	1SExp	1 SM	1L	Total
Filles	76	92	50	218
Garçons	43	76	13	132
Total	119	168	63	350

Les fiches de tous ces élèves sont rangées dans un carton et on choisit une fiche au hasard parmi les 350.

On appellera $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ les événements respectifs « la fiche est celle d'un élève de 1S Exp », « la fiche est celle d'un élève de 1 SM », « la fiche est celle d'un élève de 1SEG », « la fiche est celle d'une fille » et « la fiche est celle d'un garçon ».

Yassine Elamri

1 Déterminer $p(E \cap F)$ et interpréter le résultat.

2 Déterminer $p(F)$ et interpréter le résultat.

3 La probabilité de l'événement « la fiche est celle d'un élève inscrit en section SExp, **sachant qu**'il est une fille » est dite probabilité conditionnelle de l'événement E sachant F et est notée $p_F(E)$.

a Déterminer $p_F(E)$.

b Comment aurait-on pu obtenir ce résultat à partir des deux précédents ?

c Compléter le tableau en y indiquant les probabilités conditionnelles des différentes sections connaissant le sexe.

	E	L	M	Total
F	$p_F(E) = \frac{76}{218}$			
G				

Définition

Soient Ω un univers, p une probabilité sur cet univers et A et B deux parties de cet univers, avec $A \neq \varnothing$.
La probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé, notée $p_A(B)$, est définie par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Propriété

Soient Ω un univers, p une probabilité sur cet univers et A et B deux parties non vides de cet univers. Alors :

$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$$

Remarque

— $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$ d'une part.
— $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$ d'autre part.

Exemple

Avec la situation de l'activité on a :
— $p(E \cap F) = p_F(E) \times p(F) = \frac{76}{218} \times \frac{218}{350} = \frac{76}{350}$;
— $p(E \cap F) = p_E(F) \times p(E) = \frac{76}{119} \times \frac{119}{350} = \frac{76}{350}$.

Propriété

Soient Ω un univers, p une probabilité sur cet univers et B une partie non vide de cet univers et A_1, A_2, …, A_m formant une partition de Ω. Alors :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \cdots + p(A_m \cap B)$$

Exemple

Avec la situation de l'activité :
— E, M, et L forment une partition de l'univers car $E \cup M \cup L = \Omega$ (à eux trois ils regroupent toutes les possibilités) et $E \cap M = \varnothing$, $E \cap L = \varnothing$ et $M \cap L = \varnothing$ (ils sont disjoints).
Alors $p(F) = p(E \cap F) + p(M \cap F) + p(L \cap F) = \frac{76}{350} + \frac{92}{350} + \frac{50}{350} = \frac{218}{350}$.

Yassine Elamri

— F et G forment eux aussi une partition de l'univers. Alors $p(E) = p(F \cap E) + p(G \cap E) = \frac{76}{350} + \frac{43}{350} = \frac{119}{350}$

6. Indépendance de deux évènements

Définition

Dans le langage courant, on dit que deux événements sont indépendants quand la réalisation de l'un ne dépend pas de celle de l'autre. On va donner une définition mathématique de cette notion.
Deux évènements A et B sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Attention !

" Incompatibles " est différent de " indépendants ". En effet, si A et B sont deux évènements incompatibles de probabilités non nulles, on a $P(A \cap B) = 0$ avec $P(A) \times P(B) \neq 0$.

Exemple

On tire une carte au hasard dans un jeu classique de 32 cartes.
On considère les évènements : A : "obtenir une figure (valet, dame ou roi)" et B : "obtenir un carreau". On a alors $A \cap B$ = "obtenir un valet de carreau ou une dame de carreau ou un roi de carreau".
On a $P(A \cap B) = \frac{3}{32}$. De même $P(A) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ et $P(B) = \frac{1}{4}$.
On a $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$, les événements sont donc indépendants.

7. Variable aléatoire

On associe fréquemment un nombre aux résultats d'une expérience aléatoire. Par exemple, pour un jeu de hasard, on peut associer un gain (ou une perte) à chaque issue du jeu.

Définition

On appelle variable aléatoire sur un univers Ω, une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exercice d'application 10

On lance une pièce de monnaie trois fois successivement, et on note le côté sorti pour chacune d'elles. L'univers Ω de cette expérience est $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$.
On considère alors le jeu suivant :

— si on obtient deux fois successivement P ou F, on gagne 1 \$
— si on obtient trois fois successivement P ou F, on gagne 2 \$
— sinon, on perd 3 \$

La fonction X qui à chaque issue de Ω associe le gain (ou la perte) est une variable aléatoire.

Évènement	PPP	PPF	PFP	PFF	FPP	FPF	FFP	FFF
X	2	1	-3	1	1	-3	1	2

On peut alors indiquer la probabilité de chaque gain :

gain x_i	-3	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$	$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Avec ce jeu, le gain moyen que l'on peut espérer est : $-3 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Yassine Elamri

C'est-à-dire que, sur un très grand nombre de réalisations de ce jeu (une infinité ...), on peut espérer remporter 0,25**$** par partie.

Remarque

— La dénomination "X est une variable aléatoire" est un abus de langage : X n'est pas une variable mais une fonction, qui plus est parfaitement déterminée (donc qui n'a rien d'aléatoire).

— La notation $(X = x_i)$ désigne l'événement : "la variable aléatoire X prend la valeur x_i" ; $p(X = x_i)$ désigne alors la probabilité de cet événement.

Définition

Pour une variable aléatoire X pouvant prendre les valeurs x_1, x_2, ..., x_n, avec les probabilités :
$p_1 = p(X = x_1)$, $p_2 = p(X = x_2)$, ..., $p_3 = p(X = x_n)$, on définit les grandeurs :

- l' **espérance** mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$
- la **variance** : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - E(X)|^2 p_i$ et l'**écart-type** : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exercice d'application 11

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau :

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$0,1$	$0,2$	$0,25$	$0,05$		$0,15$

Calculer $p(X > 0)$, puis l'espérance mathématique de X, ainsi que son écart-type.

Exercice d'application 12

Une urne contient six boules, trois noires et trois rouges. On tire au hasard deux boules simultanément et on note leur couleur.
X est la variable aléatoire associant à chaque tirage le nombre de boules rouges obtenu.

1 Montrer qu'il y a 15 tirages possibles.

2 Établir la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

Exercice d'application 13

Lors d'un examen, un élève doit répondre à un QCM. Ce QCM comporte trois questions et, pour chaque question, trois réponses différentes sont proposées, dont une seule est exacte. Chaque réponse exacte rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 point.
Une note totale négative est ramenée à 0.

1 Représenter toutes les issues possibles à l'aide d'un arbre.
On appelle X le total des points que l'élève a obtenu pour cet exercice.

2 Déterminer les différentes valeurs prises par X, la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

8. Loi binomial

Activité 5

La probabilité qu'un joueur de football marque un pénalty est égale à 0,8 . Sur une série de cinq tirs au but , on note X l'aléa numérique égale au nombre de pénaltys réussis

1 Quelle est la probabilité que le joueur marque au moins 4 pénaltys

Yassine Elamri

2 Déterminer la loi de probabilité de X

Solution :

1 On a : $p(X=5)+p(X=4)=(0,8)^5+5\times(0,8)^4\times 0,2=0,73728$

2 $X(\Omega)=\{0,1,2,3,4,5\}$.

- $p(X=5)=(0,8)^5=0,32768$
- $p(X=4)=5\times(0,8)^4\times 0,2=0,4096$
- $p(X=3)=C_5^3(0,8)^3(0,2)^2=0,2048$
- $p(X=2)=C_5^2(0,8)^2(0,2)^3=0,0512$
- $p(X=1)=C_5^1(0,8)^1(0,2)^4=0,0064$
- $p(X=0)=(0,2)^5=0,00032$

Définition

Considérons une expérience aléatoire constituée de n épreuves identiques et indépendants n'ayant que deux issues : succès ou échec.
soit p la probabilité de l'événement succès
Soit x la Variable aléatoire associant à cette expérience, le nombre de succès réalisés au cours de ces n épreuves.
Alors la loi de probabilité de X est définie par :

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k};\ \text{avec}\ k\in\{0,1,2,\ldots,n\}.$$

On dit que X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p.

Notation et Vocabulaire :

La loi binomiale de paramètres n et p est noté $B(n,p)$.

Exemple

On lance un dé cubique n fois $(n\geq 1)$. On note A l'événement " Obtenir au moins un **6**"

1 Calculer $p(A)$ pour $n=3$

2 Calculer $p(A)$ en fonction de n.

3 Combien de fois faut-il lancer le dé pour que la probabilité de A soit supérieure ou égale à **0.9** ?

Solution :

Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre de fois d'obtenir **6**.
X suit une loi binomiale de paramètres $\left(n,\frac{1}{6}\right)$

1 $p(A)=1-p(\bar{A})=1-\left(\frac{5}{6}\right)^3$

2 $p(A)=1-p(\bar{A})=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

3 On a :

$$P(A)\geq 0,9 \quad \text{signifie} \quad 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\geq 0,9 \quad \text{signifie} \quad \left(\frac{5}{6}\right)^n\leq 0,1$$
$$\text{signifie} \quad n\ln\left(\frac{5}{6}\right)\leq \ln(0,1) \quad \text{signifie} \quad n\geq \frac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$$
$$\text{signifie} \quad n\geq 12,62$$

Alors il faut lancer au moins **13** fois le dé pour que $p(A)$ soit supérieure ou égale à **0.9** .

Variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli

Soit $\mathscr{E}$ une épreuve comportant deux issues (Succès et Échec). On note p la probabilité de Succès.
Soit X la variable aléatoire qui est égale à 1 en cas de Succès et 0 sinon. Alors, on dit que X suit une **loi de Bernoulli**

Yassine Elamri

de paramètres p. On note alors : $B(1;p)$.

Espérance et variance de la loi binomiale

— Si X suit une **loi de Bernoulli** de paramètres p noté $B(1;p)$, alors : $E(X)=p$ et $V(X)=pq$(où $q=1-p$)

— Si X suit une **loi binomiale** de paramètres p noté $B(n;p)$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in[0;1]$, alors :

$$E(X)=np \text{ et } V(X)=npq \text{ (où } q=1-p)$$

Yassine Elamri