Ordre et opérations

I Comparaison de deux nombres rationnels

1 Activités

Activité

Comparer a et b dans les cas suivants :

1) $a = \dfrac{-13}{3}$ et $b = \dfrac{5}{7}$

2) $a = \dfrac{8}{5}$ et $b = \dfrac{8}{7}$

3) $a = \dfrac{-5}{6}$ et $b = \dfrac{7}{-6}$

4) $a = \dfrac{5}{6}$ et $b = \dfrac{7}{9}$

Activité

Compléter le tableau suivants

a	b	Comparaison de a et b	$a-b$	Le signe de $a-b$
15	51			
-8	-7			
-3.7	9.7			
$\dfrac{-7}{2}$	$\dfrac{5}{9}$			

En utilisant les résultats du tableau, compléter par $\leqslant$ ou $\geqslant$

➙ Si $a-b \geqslant 0$ alors $a \cdots b$

➙ Si $a-b \leqslant 0$ alors $a \cdots b$

Règle

Pour comparer deux nombres rationnels a et b, on détermine le signe de leur différence $a-b$ (ou $b-a$)

★ Si $a-b \geqslant 0$ (ou $b-a \leqslant 0$), alors $a \geqslant b$ (ou $b \leqslant a$)

★ Si $a-b \leqslant 0$ (ou $b-a \geqslant 0$), alors $a \leqslant b$ (ou $b \geqslant a$)

EXEMPLES

1 Comparer les nombres $\dfrac{2}{5}$ et 7

2 Comparer $x = \dfrac{11}{3}$ et $y = \dfrac{7}{8}$

3 Soient a et b deux nombres rationnels tel que $a-b=-5$
Comparer a et b

Yassine Elamri

https://steinmath.com

Solution

1 On a : $\frac{2}{5}-7=\frac{2}{5}-\frac{35}{5}=\frac{2-35}{5}=\frac{-33}{5}$
Or : $\frac{-33}{5}\leqslant 0$, donc $\frac{2}{5}-7\leqslant 0$
Alors $\frac{2}{5}\leqslant 7$

2 On a : $x-y=\frac{11}{3}-\frac{7}{8}=\frac{88}{24}-\frac{21}{24}=\frac{88-21}{24}=\frac{67}{24}$
Or : $\frac{67}{24}>0$ donc $x-y>0$
Alors $x>y$

3 On a : $a-b=-5$
Or $-5<0$ donc $a-b<0$
Alors : $a<b$

2 Vocabulaire

Le symbole <

Le symbole $<$ signifie, inférieur strictement à
C'est dire que $a<b$ signifie que $\begin{cases}a \text{ inférieur à } b\\ \text{et } a\neq b\end{cases}$
Et on dit : a est strictement inférieur à b

Le symbole $\leqslant$

Le symbole $\leqslant$ signifie, inférieur ou égale à
C'est dire que $a\leqslant b$ signifie que $\begin{cases}a \text{ inférieur à } b\\ \text{ou } a=b\end{cases}$
Et on dit : a est inférieur ou égale à b

Le symbole >

Le symbole $>$ signifie, supérieur strictement à
C'est dire que $a>b$ signifie que $\begin{cases}a \text{ supérieur à } b\\ \text{et } a\neq b\end{cases}$
Et on dit : a est strictement supérieur à b

Le symbole $\geqslant$

Le symbole $\geqslant$ signifie, supérieur ou égale à
C'est dire que $a\geqslant b$ signifie que $\begin{cases}a \text{ supérieur à } b\\ \text{ou } a=b\end{cases}$
Et on dit : a est supérieur ou égale à b

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

L'inégalité

Soient a et b deux nombres rationnels
Toute écriture sous la forme $a < b$, ou $a > b$ ou $a \leqslant b$ ou $a \geqslant b$ s'appelle inégalité
Les nombres a et b s'appelent les cotés de l'inégalité

II Ordre et opérations

1 Ordre et addition

Activité

Soient m, n et p trois nombres rationnels tel que : $m \geqslant n$

1. Calculer $(m+p)-(n+p)$
   Déduire une comparaison de $n+p$ et $m+p$
2. De la même façon, comparer $n-p$ et $m-p$
3. Soit k un nombre rationnel non nul
   a. Factoriser $m \times k - n \times k$
   b. Si k et positif, comparer $m \times k$ et $n \times k$
   c. Si k et négatif, comparer $m \times k$ et $n \times k$

Proposition

Soient a, b et k trois nombres rationnels

- ★ Si $a \leqslant b$ alors $a+k \leqslant b+k$
- ★ Si $a \geqslant b$ alors $a+k \geqslant b+k$

• Exemple

Soient a et b deux nombres rationnels tel que : $a-5 \leqslant b$
Montrer que : $a-3 \leqslant b+2$

Solution

On a : $a-5 \leqslant b$, donc $a-5+2 \leqslant b+2$
Alors : $a-3 \leqslant b+2$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Proposition

Soient a, b, c et d trois nombres rationnels

- ★ Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $a+c \leqslant b+d$
- ★ Si $a \geqslant b$ et $c \geqslant d$ alors $a+c \geqslant b+d$

• Exemple

Soient a et b deux nombres rationnels tel que : $a+3 \leqslant -4$ et $2b-1 \leqslant \frac{1}{2}$

Montrer que : $2b+a+2 \leqslant \frac{-7}{2}$

Solution

On a : $a+3 \leqslant -4$ et $2b-1 \leqslant \frac{1}{2}$, donc $a+3+2b-1 \leqslant -4+\frac{1}{2}$

Donc $a+2b+2 \leqslant \frac{-8}{2}+\frac{1}{2}$

Donc $a+2b+2 \leqslant \frac{-8+1}{2}$

Alors $a+2b+2 \leqslant \frac{-7}{2}$

2 Ordre et multiplication

Proposition

Soient a, b et k trois nombres rationnels

- ★ Si $a \leqslant b$ et $c > 0$ donc $a \times c \leqslant b \times c$
- ★ Si $a \leqslant b$ et $c < 0$ donc $a \times c \geqslant b \times c$

• Exemple

Soient a et b deux nombres rationnels tel que : $a \leqslant \frac{1}{2}$ et $b \leqslant -\frac{3}{2}$

Déduire une inégalité contenant $2a$ et de $-6b$

Solution

☆ On a : $a \leqslant \frac{1}{2}$ et $2 > 0$, donc $2 \times a \leqslant 2 \times \frac{1}{2}$

Alors $2a \leqslant 1$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

☆ On a : $b \leqslant -\frac{3}{2}$ et $-6 < 0$, donc $-6 \times b \geqslant -6 \times \left(-\frac{3}{2}\right)$

Donc $-6b \geqslant \frac{18}{2}$

Alors $-6b \geqslant 9$

III Encadrement

Activité

Soient a, b, x, y, z et t des nombres rationnels tel que : $x \leqslant a \leqslant y$ et $z \leqslant b \leqslant t$

1 a Monter que $a+b \leqslant y+t$ et $x+z \leqslant a+b$

b Déduire un encadrement de $a+b$

2 a Montrer que $-t \leqslant -b$ et $-b \leqslant -z$

b Déduire un encadrement de $-b$

c Déduire un encedrement de $a-b$ (remarquer que $a-b=a+(-b)$)

Définition

Soient a, b et x trois nombres rationnels
Chacune des écritures $a \leqslant x \leqslant b$ ou $a < x < b$ ou $a \geqslant x \geqslant b$ ou $a > x > b$ s'appelle un encadrement du nombre x

Remarque

★ L'écriture $a \leqslant x \leqslant b$ se lit : x est compris entre a et b
★ L'écriture $a < x < b$ se lit : x est strictement compris entre a et b

1 Encadrement et approximation

• Exemple

Considérons le nombre $\frac{13}{7}$

On a

1 3	7
6 0	1.85
4 0	
5	

❶ ➪ La valeur approchée du nombre $\frac{13}{7}$ à 0.01 par défaut est 1.85

➪ La valeur approchée du nombre $\frac{13}{7}$ à 0.01 par excès est 1.86

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

➪ L'écriture $1.85 < \frac{13}{7} < 1.86$ est un encadrement du nombre $\frac{13}{7}$

❷ ➪ La valeur approchée du nombre $\frac{-13}{7}$ à 0.01 par défaut est -1.86

➪ La valeur approchée du nombre $\frac{-13}{7}$ à 0.01 par excès est -1.85

➪ L'écriture $-1.86 \leqslant \frac{-13}{7} \leqslant -1.85$ est un encadrement du nombre $\frac{-13}{7}$

2 Encadrement et opérations

a Encadrement d'une somme

Proposition

On considère tous les nombres rationnels

Si $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{cases}$

Alors : $a+c \leqslant x+y \leqslant b+d$

• Exemple

Soient x et y deux nombres rationnels tel que : $-2 \leqslant x \leqslant 3$ et $-1 \leqslant y \leqslant 0$

Encadrer $x+y$

Solution

On a $-2 \leqslant x \leqslant 3$ et $-1 \leqslant y \leqslant 0$ donc $(-2)+(-1) \leqslant x+y \leqslant 3+0$

Alors $-3 \leqslant x+y \leqslant 3$

b Encadrement d'une différence

Proposition

On considère tous les nombres rationnels

Si $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{cases}$

Alors : $a-d \leqslant x-y \leqslant b-c$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

⚠ ✯ On a $a-b=a+(-b)$
Donc pour encadrer $a-b$, on encadre d'abord $(-b)$, puis on applique la proposition 4 (Proposition de l'encadrement d'une somme) ✯ Soit x un nombre rationnel
Si $a \leqslant x \leqslant b$, alors $-b \leqslant -x \leqslant -a$

• Exemple

Soient x et y deux nombres rationnels tel que : $-5 \leqslant x \leqslant -3$ et $-1 \leqslant y \leqslant 4$
Encadrer $x-y$

Solution

On a $-1 \leqslant y \leqslant 4$ donc $-4 \leqslant -y \leqslant 1$
On a $-5 \leqslant x \leqslant -3$ et $-4 \leqslant -y \leqslant 1$ donc $(-5)+(-4) \leqslant x+(-y) \leqslant (-3)+1$
Alors $-9 \leqslant x-y \leqslant -2$

c Encadrement d'un produit

Proposition

Soient a, b, k et x trois nombres rationnels tel que $a \leqslant x \leqslant b$
✯ Si $k>0$, alors $ka \leqslant kx \leqslant kb$
✯ Si $k<0$ alors $kb \leqslant kx \leqslant ka$

• Exemple

Soit x un nombre rationnel tel que : $-3 \leqslant x \leqslant 4$
Encadrer : $2x$ et $-5x$

Solution

★ On a $-3 \leqslant x \leqslant 4$ et $2>0$
Donc $2\times(-3) \leqslant 2\times x \leqslant 2\times 4$
Alors $-6 \leqslant 2x \leqslant 8$

★ On a $-3 \leqslant x \leqslant 4$ et $-5<0$
Donc $(-5)\times 4 \leqslant (-5)\times x \leqslant (-5)\times(-3)$
Alors $-20 \leqslant -5x \leqslant 15$

Application

Soient a et b deux nombres rationnels tel que : $1 \leqslant a \leqslant \dfrac{5}{2}$ et $-4 \leqslant b \leqslant \dfrac{-3}{2}$
Encadrer :

★ $a+b$ ★ $a-b$ ★ $-4a$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

★ $8b$ ★ $3a+2$ ★ $-2b-\frac{3}{4}$

Solution

★ On a $1 \leqslant a \leqslant \frac{5}{2}$ et $-4 \leqslant b \leqslant \frac{-3}{2}$
Donc $1+(-4) \leqslant a+b \leqslant \frac{5}{2}+\frac{-3}{2}$
Alors $-3 \leqslant a+b \leqslant 1$

★ On a $1 \leqslant a \leqslant \frac{5}{2}$ et $-4 \leqslant b \leqslant \frac{-3}{2}$
Donc $1 \leqslant a \leqslant \frac{5}{2}$ et $\frac{3}{2} \leqslant -b \leqslant 4$
Donc $1+\frac{3}{2} \leqslant a+(-b) \leqslant \frac{5}{2}+4$
Alors $\frac{5}{2} \leqslant a-b \leqslant \frac{13}{2}$

★ On a $1 \leqslant a \leqslant \frac{5}{2}$
Donc $(-4) \times \frac{5}{2} \leqslant (-4) \times a \leqslant (-4) \times 1$
Alors $-10 \leqslant -4a \leqslant -4$

★ On a $-4 \leqslant b \leqslant \frac{-3}{2}$
Donc $8 \times (-4) \leqslant 8 \times b \leqslant 8 \times \frac{-3}{2}$
Alors $-32 \leqslant 8b \leqslant -12$

★ On a $1 \leqslant a \leqslant \frac{5}{2}$
Donc $3 \times 1 \leqslant 3 \times a \leqslant 3 \times \frac{5}{2}$
Donc $3 \leqslant 3a \leqslant \frac{15}{2}$
Donc $3+2 \leqslant 3a+2 \leqslant \frac{15}{2}+2$
Alors $5 \leqslant 3a+2 \leqslant \frac{19}{2}$

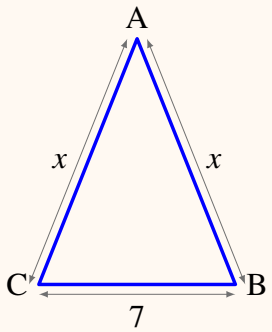
★ On a $-4 \leqslant b \leqslant \frac{-3}{2}$
Donc $(-2) \times \frac{-3}{2} \leqslant (-2) \times b \leqslant (-2) \times (-4)$
Donc $3 \leqslant -2b \leqslant 8$
Donc $3-\frac{3}{4} \leqslant -2b-\frac{3}{4} \leqslant 8-\frac{3}{4}$
Alors $\frac{9}{4} \leqslant -2b-\frac{3}{4} \leqslant \frac{29}{4}$

IV Les inéquations

Activité

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que : $AB = AC = x$ et $BC = 7$

1. Déterminer le périmètre du triangle ABC en fonction de x
2. Quelle condition doit remplir x pour que la périmètre soit supérieure à 15
3. Donner quelque valeur de x qui vérifie les conditions précédentes



Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

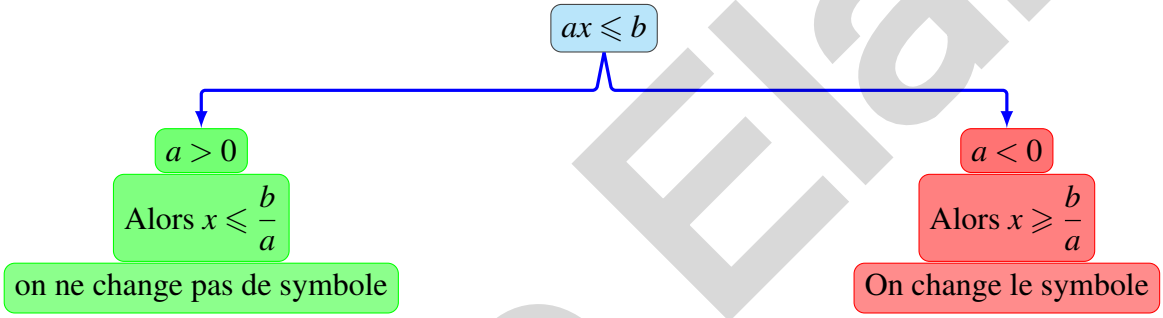
Définition

Toute inégalité qui s'écrit sous la forme $ax+b \leqslant 0$, ou $ax+b<0$, ou $ax+b \geqslant 0$, ou $ax+b>0$ s'appelle une inéquation du premier degré à une inconnue

1 Techniques de résolution d'une inéquation

La résolution d'une inéquation se base sur les mêmes techniques de résolution des équation

- On regroupe les inconnues dans un coté et les termes connus dans l'autre coté, à condition de changer le signe du terme déplacé
- Il faut faire attention au signe du nombre a dans l'inéquation $ax \leqslant b$



2 Les cas de résolution

- ① Si on a trouvé par exemple $x>a$, (ou $x \leqslant a$), on dit que tous les nombres rationnels supérieur strictement à a (inférieur ou égaux à a) sont solutions de cet inéquation
- ② Si on a trouvé une expression impossible, par exemple : $0 \geqslant 3(\ 0>3)$, on dit que l'inéquation n'admet pas de solution
- ③ Si on a trouvé une expression vraie, par exemple : $0>-1$, on dit que tout nombre rationnel est solution de cet inéquation

EXEMPLES

Résoudre les inéquations suivantes

1. $2x+1 \leqslant 5$
2. $2(3x-5)-3(x+1) \geqslant 0$
3. $\frac{x+1}{2}-\frac{x-3}{3}>\frac{3x+5}{6}$
4. $2(3x-1)-4x \geqslant 2x+1$
5. $3x+5-2(x+2)>x-7$

Solution

1. L'inéquation $2x+1 \leqslant 5$ est respectivement équivalente à :
$2x \leqslant 5-1$
$2x \leqslant 4$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

$x \leqslant \frac{4}{2}$
$x \leqslant 2$
Donc tous les nombres rationnels inférieurs ou égaux à 2 sont solutions de cet inéquation

2 L'inéquation $2(3x-5)-3(x+1) \geqslant 0$ est respectivement équivalente à :
$6x-10-3x-3 \geqslant 0$
$6x-3x-10-3 \geqslant 0$
$3x-13 \geqslant 0$
$3x \geqslant 13$
$x \geqslant \frac{13}{3}$
Donc tous les nombres rationnels supérieurs ou égaux à $\frac{13}{3}$ sont solutions de cet inéquation

3 L'inéquation $\frac{x+1}{2}-\frac{x-3}{3} > \frac{3x+5}{6}$ est respectivement équivalente à :
$\frac{3(x+1)-2(x-3)}{6} > \frac{3x+5}{6}$
$3(x+1)-2(x-3) > 3x+5$
$3x+3-2x+6 > 3x+5$
$\cancel{3x}-2x-\cancel{3x} > 5-3-6$
$-2x > -4$
$x < \frac{-4}{-2}$
$x < 2$
Donc tous les nombres rationnels strictement inférieurs à 2 sont solutions de cet inéquation

4 L'inéquation $2(3x-1)-4x \geqslant 2x+1$ est respectivement équivalente à :
$6x-2-4x \geqslant 2x+1$
$6x-4x-2x \geqslant 1+4$
$0x \geqslant 4$
$0 \geqslant 4$
Ce qui est impossible
Donc cet inéquation n'admet pas de solution

5 L'inéquation $3x+5-2(x+2) > x-7$ est respectivement équivalente à :
$3x+5-2x-4 > x-7$
$3x-2x-x > -7-5+4$
$0x > -8$
$0 > -8$
Ce qui est vraie
Donc tous nombres rationnels est une solution de cet inéquation

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today