Espaces Vectoriels Réels

Exercice

On rappelle que : $M_2(\mathbb{R},+,\times)$ est un anneau unitaire et que $M_2(\mathbb{R},+,.)$ est un espace vectoriel réel.

I- On pose : $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a+b & b\\ b & a+b\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

1. Montrer que : $(E,+,.)$ est un espace vectoriel réel.
2. On pose : $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$
   - a. Montre que (I,J) est une base de $(E,+,.)$, puis en déduire $dim(E)$.
   - b. Vérifier que : $J^2=2J$, puis montrer que E est stable dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.
   - c. Montrer que $(E,+,.)$ est un anneau unitaire non intègre.
   - d. Montrer que la matrice $M(a,b)$ est inversible dans $(E,+,.)$ si et seulement si $a\notin 0$ et $a\notin -2b$.

II- On considère l'ensemble : $F=\left\{A(x)=I+\dfrac{3^x-1}{2}J\ /x\in\mathbb{Z}\right\}$.

1. Montrer que F est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.
2. Pour tout $x\in\mathbb{Z}$, on pose $f(x)=A(x)$.
   - a. Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{Z},+)$ vers $F,\times$.
   - b. En déduire la structure de $(F,\times)$ et préciser son élément neutre et l'inverse de la matrice $A(x)$ pour tout $x\in\mathbb{Z}$.

Exercice

on rappelle que $\left(M_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire et que $\left(M_2(\mathbb{R}),+,.\right)$ est un espace vectoriel réel .

On pose $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a+b & 4b\\ -b & a-b\end{pmatrix}/\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

1. Montrer que $(E,+,.)$ est un sous-espace vectoriel de $\left(M_2(\mathbb{R}),+,.\right)$.
2. On pose $I=M(1,0)$ et $J=M(0,1)$.
   Montrer que (I,J) est une base de $(E,+,.)$, puis en déduire $\dim(E)$.
3. Montrer que $\left(\forall k\in\mathbb{N}^*\right),\ J^k=(-3)^k.I$ puis en déduire les cordonnées,dans la base (I,J), de la matrice : $S_n=I+J+J^2+\cdots+J^{2n}$ où $n\in\mathbb{N}^*$
4. a. Montrer que $\left(\forall(a,b,x,y)\in\mathbb{R}^4\right),\ M(a,b)\times M(x,y)=M(ax-3ay,ay+bx)$

Yassine Elamri

b En déduire E que est stable dans $\left(M_2(\mathbb{R}),\times\right)$.

5 a Montrer que $(1,i\sqrt{3})$ une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C},+,.)$.

b Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on pose $f(a+ib\sqrt{3})=M(a,b)$.
Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C},\times)$ vers $(E,\times)$, puis en déduire la structure de $(E^*,\times)$ où $E^*=E-\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

6 Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif .

7 On considère la matrice $A=\frac{1}{2}.(I+J)$.
Déterminer tous le entiers naturels p tel que $A^p=I$.

Exercice

On considère l'ensemble $E=\left\{M(a,b)=aI+bA,(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$
où $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

1 a Montrer que : $A^2=A+2I$

b En déduire que la matrice A et inversible et donner son inverse A^{-1}.

c Déterminer deux suites (u_n) et (v_n) telles que $A^n=u_nA+v_nI$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2 On pose $\begin{cases}\alpha_n=2u_n+v_n\\ \beta_n=u_n-v_n\end{cases}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a Déterminer la nature de chacune des suites (u_n) et (v_n).

b Donner le terme général de chacune des suites (α_n) et (β_n).

c En déduire A^n en fonction de n.

3 Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

4 a Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau intègre.

b $(E,+,\times)$ est-il un corps ?

Exercice

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R});+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(M_2(\mathbb{R});+,\times)$ est un anneau unitaire dont la zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Yassine Elamri

Today better than https://steinmath.com er than today

On pose : $J = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} \ln(ab) & \ln(b^2) \\ \ln\left(\frac{1}{b}\right) & \ln\left(\frac{a}{b}\right) \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \right\}$

1 a Montrer que $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

b Vérifier que : $I \in E$ et $J \in E$.

c Montrer que la famille $B = (I;J)$ est une base de $(E;+;\cdot)$.

2 Montrer que : $(\forall (M;N) \in M_2(R) \times M_2(R))\ (\forall (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2)\ ; (\alpha \cdot M) \times (\beta \cdot N) = (\alpha\beta) \cdot (M \times N)$

3 a Vérifier que : $J^2 = -I$; puis déduire que J est inversible et déterminer J^{-1}.

b Soient $M(\alpha;\beta)_B$ et $N(\alpha^2;\beta^2)_B$ deux éléments de E. [$(\alpha;\beta)$ et $(\alpha^2;\beta^2)$ sont les coordonnées de M et N dans la base B]

Montrer que $M \times N \in E$

4 On considère l'application φ définie de $\mathbb{C}$ dans Epar : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}),\ \varphi(x+iy) = M(x;y)_B$ où $(x;y)$ les coordonnées de la matrice M dans la base B.

a Montrer que φ est une bijection de $\mathscr{C}$ dans E.

b Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C};\times)$ vers $(E;\times)$

c En déduire la structure de $(E^*;\times)$ où $E^* = E_- \{M(0;0)_B\}$.

5 Montrer que $(E;+;\times)$ est un corps commutatif.

Exercice

Soient x et y deux réels on pose $x\ T\ y = xy - 3(x+y) + 12$

1 a Démontrer que la loi T est commutative, associative et admet un élément neutre dans $\mathbb{R}$.

b Déterminer les éléments symétriques dans $(\mathbb{R}, T)$.

2 posons $G = \mathbb{R} - \{3\}$.

a Démontrer que G est une partie stable dans $(\mathbb{R}, T)$.

b Démontrer que (G, T) est un groupe commutatif.

3 On considère l'application φ de G dans $\mathbb{R}^*$ définie par $\varphi(x) = x - 3$

Démontrer que φ est un morphisme bijectif de (G, T) dans $(\mathbb{R}^*, \times)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exercice

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est anneau unitaire et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On considère l'ensemble E des matrices carrés de la forme $M(a,b)=\begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix}$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

1. a. Montrer que $(E,+)$ est groupe abélien.
   b. Montrer que $(E,+,\cdot)$ est espace vectoriel et déterminer sa dimension.
2. On pose : $J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
   Montrer que $J^2=-3I+2J$, en déduire que J est inversible dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ et déterminer J^{-1}
3. Calculer $M(a,b)\times M(c,d)$ où $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$
4. On considère l'application f définie de E dans $\mathbb{C}$ par : $f(M(a,b))=(a-b)+ib\sqrt{2}$
   a. Montrer que f est une application bijective et déterminer sa bijection réciproque.
   b. Montrer que f est un morphisme de $(E,\times)$ dans $(\mathbb{C},\times)$
   c. En déduire la structure de $(E,+,\times)$
   d. Déterminer l'inverse de $M(a,b)$ où $(a,b)\neq(0,0)$
   e. Résoudre dans E l'équation : $X^4=M(1,0)$ où $X^4=X\times X\times X\times X$

Exercice

Partie A : On considère dans l'anneau unitaire $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et montrer que $A^2=4A-3I$. (On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel) .
2. Déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Partie B : On définie sur $\mathbb{R}$ la loi interne T définie par : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)$, $xTy=x+y-2016$

1. a. Montrer que T est commutative et associative dans $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que $(\mathbb{R},T)$ est un groupe commutatif.
2. Soit $\perp$ la loi définie sur $\mathbb{R}$ par $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)$, $x\perp y=x+y-\frac{1}{2016}xy$ et on considère l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2016(1-x)$
   a. Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R},\times)$ vers $(\mathbb{R},\perp)$.
   b. Déduire que $(\mathbb{R},T,\perp)$ est un corps commutatif.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exercice

Soit E l'ensemble des matrices $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ tels que $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
On pose $I = M(1,0,0)$, $A = M(0,1,0)$ et $B = M(0,0,1)$
On munit l'ensemble E de l'addition des matrices et de la multiplication d'une matrice par un nombre réel.

1. Montrer que $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la famille (I,A,B) est une base de l'espace vectoriel E.
3. a. Vérifier que : : $A^2 = B$, $B^2 = A$ et $AB = BA = -I$.
   b. Montrer que : $\left(\forall (X,Y) \in E^2\right)$, $XY = YX$ et $XY \in E$
4. On considère la matrice $Q = M(0,-1,1)$.
   a. Montrer que la matrice D est inversible.
   b. Montrer que $D^2 - D - 2I = M(0,0,0)$
   c. En déduire D^{-1}, la matrice inverse de la matrice D et montrer que $D^{-1} \in E$.

Exercice

Soit E l'ensemble des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ qui s'écrivent sous forme : $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$
où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

1. Déterminer deux matrices I et A de $M_3(\mathbb{R})$ indépendantes de a et b telles que :
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M(a,b) = aI + bA$$
2. Montrer que $A^2 = A + 2I$ et déterminer son inverse dans E.
3. Montrer que $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel et déterminer sa dimension.
4. Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif et non intègre.
5. On pose $A^0 = I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^{n+1} = A^n \times A$.
   Montrer par récurrence qu'il existe $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$
6. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $\begin{cases} U_{n+1} = 2\alpha_{n+1} + \beta_n \\ V_{n+1} = \alpha_{n+1} - \beta_{n+1} \end{cases}$
   a. Déterminer la nature de (U_n) et (V_n)
   b. Déterminer U_n, et V_n, en fonction de n
7. Déterminer les coordonnées de A^n en fonction de n dans la base $B = (I,A)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exercice

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire.

On pose $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}0&0&3\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

1. Montrer que la famille $\left(I,A,A^2\right)$ est libre dans $(M_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$.
2. a. Calculer A^2, A^3 et A^n en fonction de $n\in\mathbb{N}^*$.
   (Discuter suivant le reste de la division de n par 3)
   b. Vérifier que A admet un inverse A^{-1} que l'on déterminera.
3. On considère l'ensemble $E=\left\{M\in M_3(\mathbb{R})/\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ M=aI+bA+cA^2\right\}$
   a. Montrer que $(E,+)$ est un sous groupe de $(M_3(\mathbb{R}),+)$
   b. Vérifier que $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.
   c. Déterminer une base de E.
4. a. Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau unitaire commutatif.
   b. Calculer le déterminant de la matrice $-\sqrt[3]{3}.A+A^2$
   c. $(E,+,\times)$ est - il un corps ? Justifier votre réponse.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today