Équation d'une droite

I L'équation réduite d'une droite

1 Définition

Définition

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé , chaque droite admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$

↘ m est appelé le coefficient directeur (la pente) de la droite

↘ p est appelé l'ordonnée à l'origine

2 Exemples

• Exemple

1 Déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine des droites $(D) : y = 2x + 3$ et $(\Delta) : y = -x$

2 Déterminer l'équation réduite de la droite $(D) : 2y + 3x - 1 = 0$

3 Construire, dans un repère orthonormé , la droite $(\Delta) : y = -2x + 3$

Solution

1 Déterminons la pente et l'ordonnée à l'origine des droites (D) et (Δ)

➞ $(D) : y = 2x + 3$ est l'équation réduite de la droite (D) de pente $m = 2$ et d'ordonnée à l'origine $p = 3$

➞ $(\Delta) : y = -x$ est l'équation réduite de la droite (Δ) de pente $m = -1$ et d'ordonnée à l'origine $p = 0$

2 Déterminons l'équation réduite de la droite (D)

On a $2y + 3x - 1 = 0$, on isole y, donc $2y = -3x + 1$

C'est à dire $y = \dfrac{-3x+1}{2}$, donc $y = \dfrac{-3}{2}x + \dfrac{1}{2}$

Alors $(D) : y = \dfrac{-3}{2}x + \dfrac{1}{2}$, c'est l'équation réduite de la droite (D) de pente $m = \dfrac{-3}{2}$ et d'ordonnée à l'origine $p = \dfrac{1}{2}$

3 Construisons la droite (Δ)

On considère la droite $(\Delta) : y = -2x + 3$

Pour construire la droite (Δ), il suffit de déterminer deux points différents de cette droite

On peut, par exemple, choisir $x = 0$ donc $y = -2 \times 0 + 3 = 3$

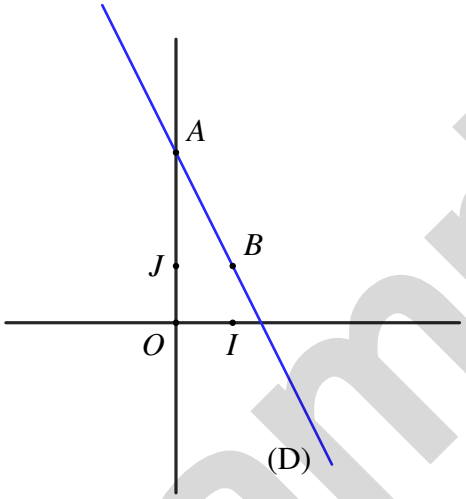
Et choisir $x = 1$ donc $y = -2 \times 1 + 3 = 1$

Yassine Elamri

https://steinmath.com

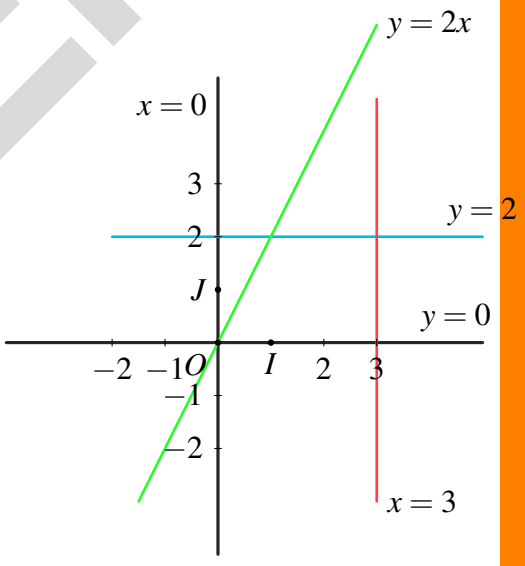
On considère le tableau suivant :

x	0	1
y	-2	1
$M(x;y)$	$A(0;-2)$	$B(1;1)$



3 Cas particulier

- ✯ L'équation de l'axe des abscisses est $y = 0$
- ✯ L'équation de l'axe des ordonnées est $x = 0$
- ✯ L'équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses (droite horizontale) et passante par le point $\text{Ma}b$ est $y = b$
- ✯ L'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées (droite verticale) et passante par le point $\text{Ma}b$ est $x = a$
- ✯ L'équation de la droite passante par l'origine du repère s'écrit sous la forme $y = mx$ (l'ordonnée à l'origine est nul)



⚠ Un point appartient à une droite, si et seulement si, ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite

• Exemple

1. Vérifier que le point $\text{A}21$ appartient à la droite $(D) : y = 2x - 3$
2. Déterminer, dans chaque cas, l'équation réduite de la droite (AB)
   - a. $\text{A}ay_A$ et $\text{B}ay_B$
   - b. $\text{A}x_Ab$ et $\text{B}x_Bb$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Solution

1 Vérifions que le point $A \in (D)$
On a $2x_A - 3 = 2 \times 2 - 3 = 4 - 3 = 1 = y_A$
Donc $A \in (D)$

2 Déterminons l'équation réduite de(AB)

a Aay_A et Bay_B
L'équation de la droite (AB) est $x = a$

b Ax_Ab et Bx_Bb
L'équation de la droite (AB) est $y = b$

II Détermination de l'équation d'une droite

1 La pente d'une droite définie par deux points

Proposition

Si Ax_Ay_A et Bx_By_B sont deux points du plan rapporté à un repère orthonormé , tel que $x_A \neq x_B$
Alors, la pente de la droite (AB) est $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Remarque

☆ $m = \dfrac{\text{Différence des ordonnées}}{\text{Différences des abscisses}}$ en gardant l'ordre

• Exemple

On considère les points $A-1-3$ et $B-40$
Déterminer la pente de la droite (AB)

Solution

Déterminons la pente de la droite (AB)
La pente de la droite (AB) est :
$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0+3}{-4+1} = \dfrac{3}{-3}$
Donc $m = -1$

2 Détermination de l'équation réduite d'une droite définie par deux point

➡ Déterminons l'équation de la droite (AB) tel que $A1-2$ et $B-23$
L'équation réduite de la droite (AB) est de la forme $y = mx + p$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

① Détermination de m

On a $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3+2}{-2-1} = \dfrac{5}{-3} = \dfrac{-5}{3}$

D'ou : $(AB) : y = \dfrac{-5}{3}x + p$

② Détermination de p

On a $A \in (AB)$, donc $y_A = \dfrac{-5}{3}x_A + p$

Donc $-2 = \dfrac{-5}{3} \times 1 + p$, c'est à dire $-2 = \dfrac{-5}{3} + p$

D'ou $p = -2 + \dfrac{5}{3}$ donc $p = \dfrac{-1}{3}$

Alors, l'équation réduite de la droite (AB) est $(AB) : y = \dfrac{-5}{3}x - \dfrac{1}{3}$

3 Détermination de l'équation d'une droite définie par sa pente et un point

Déterminons l'équation réduite de la droite (Δ) de pente 3 et qui passe par le point Ę2−1
On a l'équation réduite de la droite (Δ) s'écrit sous la forme $(\Delta) : y = 3x + p$

♦ Détermination de p

On a $E \in (\Delta)$, donc $y_E = 3x_E + p$
Donc $-1 = 3 \times 2 + p$, c'est à dire $-1 = 6 + p$
D'ou $p = -1 - 6$ donc $p = -7$
Alors, l'équation réduite de la droite (Δ) est $(\Delta) : y = 3x - 7$

Application

Soient les points Ą11 et Ą2−1
Montrer que l'équation réduite de la droite (AB) est $y = -2x + 3$

Solution

Montrons que $(AB) : y = -2x + 3$

★ Mèthode ① Vérification

On a $\begin{cases} -2x_A + 3 = -2 \times 1 + 3 = -2 + 3 = 1 = y_A \\ -2x_B + 3 = -2 \times 2 + 3 = -4 + 3 = -1 = y_B \end{cases}$

Donc les deux points A et B vérifient l'équation $y = -2x + 3$
Alors $(AB) : y = -2x + 3$

★ Méthode ② Vérification

On a $(AB) : y = mx + p$
On a $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-1-1}{2-1} = \dfrac{-2}{1} = -2$
donc $(AB) : y = -2x + p$
Or $A \in (AB)$, donc $y_A = -2x_A + p$
Donc $1 = -2 \times 1 + p = -2 + p$, donc $p = 1 + 2 = 3$
Alors $(AB) : y = -2x + 3$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

III Parallélisme et orthogonalité de deux droites

1 Condition de parallélisme de deux droites

Proposition

Soient (D) et (Δ) deux droites tel que : $(D) : y = mx + p$ et $(\Delta) : y = m'x + p'$
✪ $(D) \parallel (\Delta)$ est équivalent à $m = m'$
Autrement dit : Deux droites sont parallèles si est seulement s'ils ont la même pente

• Exemple

On considère les deux droites $(D_1) : y = -2x + 1$ et $(D_2) : y = -2x + 5$
Est-ce-que $(D_1) \parallel (D_2)$?

Solution

La pente de la droite (D_1) est -2, et la pente de la droite (D_2) est -2
Donc les deux droites (D_1) et (D_2) ont la même pente (-2), alors $(D_1) \parallel (D_2)$

Application

On considère la droite $(D) : y = 2x - 1$

1. Est-ce-que $A(-1;2) \in (D)$?
2. Déterminer l'équation réduite de la droite (Δ) passante par A et parallèle à (D)

Solution

1. Est-ce-que $A \in (D)$?
On a $2x_A - 1 = 2 \times (-1) - 1 = -2 - 1 = -3 \neq 2$
Donc $A \notin (D)$
2. Déterminons l'équation de (Δ)
L'équation réduite de la droite (Δ) s'écrit sous la forme $y = mx + p$
Puisque $(D) \parallel (\Delta)$ donc $m = 2$
Donc $(\Delta) : y = 2x + p$
✪**Déterminons** p
On a $A \in (\Delta)$, donc $y_A = 2x_A + p$, c'est à dire $2 = 2 \times (-1) + p = -2 + p$
Donc $p = 2 + 2 = 4$
Alors $(\Delta) : y = 2x + 4$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 Condition d'orthogonalité de deux droites

Proposition

Soient (D) et (Δ) deux droites tel que : $(D): y = mx + p$ et $(\Delta): y = m'x + p'$
✪ $(D) \perp (\Delta)$ est équivalent à $m \times m' = -1$
Autrement dit : Deux droites sont perpendiculaires si est seulement si le produit de leurs pentes est égal à -1

• Exemple

On considère les deux droites $(D): y = -\frac{2}{3}x + 1$ et $(D'): 2y - 3x + 8 = 0$
Est-ce-que $(D_1) \perp (D_2)$?

Solution

On a $2y - 3x + 8 = 0$ est équivalente à $2y = 3x - 8$, c'est à dire $y = \frac{3x-8}{2}$
Donc $(D'): y = \frac{3}{2}x - 4$
La pente de la droite (D) est $m = -\frac{2}{3}$, et la pente de la droite (D') est $m' = \frac{3}{2}$
On a $m \times m' = -\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = -1$
Alors $(D_1) \perp (D_2)$

Application

On considère la droite $(D): y = -4x + 3$

1. Montrer que $A0-1 \notin (D)$?
2. Déterminer l'équation réduite de la droite (Δ) passante par le point A et perpendiculaire à (D)
3. On considère la droite $(D'): x - 4y - 1 = 0$, montrer que $(D) \perp (D')$

Solution

1. Montrons que $A \notin (D)$?
   On a $-4x_A + 3 = -4 \times 0 + 3 = 0 + 3 = 3 \neq -1$, donc $A \notin (D)$
2. Déterminons l'équation de (Δ)
   L'équation réduite de la droite (Δ) s'écrit sous la forme $y = mx + p$
   Puisque $(D) \perp (\Delta)$ donc $m \times (-4) = -1$, c'est à dire $-4m = -1$
   Donc $m = \frac{1}{4}$
   Alors $(\Delta): y = \frac{1}{4}x + p$
   ✪**Déterminons** p

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

On a $A \in (\Delta)$, donc $y_A = \frac{1}{4}x_A + p$, c'est à dire $-1 = \frac{1}{4} \times 0 + p = 0 + p$

Donc $p = -1$

Alors $(\Delta) : y = \frac{1}{4}x - 1$

3 Montrons que $(D) \perp (D')$

On a $(D') : x - 4y - 1 = 0$, donc $(D') : -4y = -x + 1$, c'est à dire $(D') : y = \frac{-x+1}{-4}$

Donc $(D') : y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ _ On a $-4 \times \frac{1}{4} = -1$, donc $(D) \perp (D')$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today