Théorème de Pythagore et cosinus d'un angle aigu

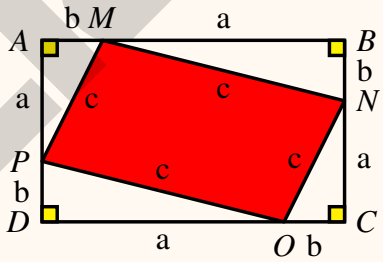
I Propriété directe

Activité

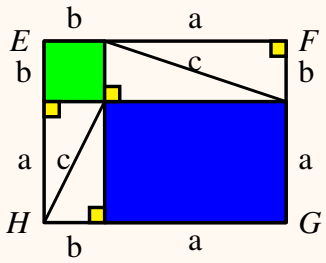
I.

1. Dessiner sur votre cahier un triangle MNP rectangle en P
2. Mesurer les longueurs de ses cotés
3. Comparer MN^2 et $PM^2 + PN^2$
4. Que remarques-tu ?

II. À partir de quatre triangles rectangles similaires et congruents les uns avec les autres, nous créons la forme suivante (dessin fait à main levée)
Soient a, b et c les longueurs des côtés des triangles rectangles



1. Quelle est, en justifiant votre réponse, la nature du quadrilatère $ABCD$?
2. Montrer que : $\widehat{PMN} = 90°$
3. Quelle est, en justifiant votre réponse, la nature du quadrilatère $MNOP$?
4. Calculer l'aire du quadrilatère $MNOP$ en fonction de c
5. Nous créons, au moyen des quatre triangles rectangles, la forme suivante où $EFGH$ est un carrée (dessin fait à main levée)



   a. Calculer l'aire du carrée $EFGH$
   b. Comparer les aires de $EFGH$ et $ABCD$
   c. Calculer l'aire des carrées en bleu et en vers
6. Que peut-on dire de l'aire des carrés colorés en vert et bleu par rapport à l'aire du carrée en rouge
7. Écrire la relation entre a, b et c

Yassine Elamri

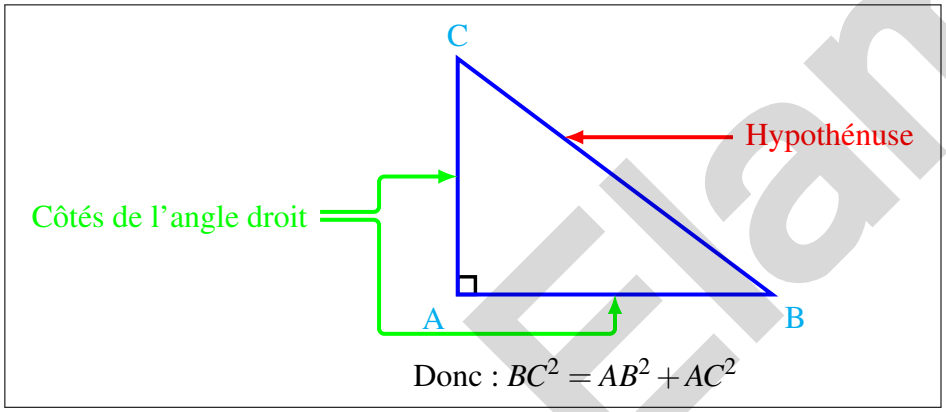
Proposition

Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de son hypoténuse est égale à la somme des carrées des longueurs des deux côtés de l'angle droit

Autrement dit : Si ABC est un triangle rectangle en A, alors : $\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$

✿ Figure géométrique :

ABC est un triangle rectangle en A



⚠ ★ Dans un triangle rectangle, la longueur de l'hypoténuse est toujours supérieure aux longueurs des deux cotés de l'angle droit
Autrement dit : si ABC est un triangle rectangle en A, donc $BC > AB$ et $BC > AC$

• Exemple

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AB = 3cm$ et $AC = 4cm$
Calculer BC

Solution

On a ABC est un triangle rectangle en A
Donc d'après le théorème de Pythagore direct, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$
C'est à dire : $BC^2 = 3^2 + 4^2$, donc : $BC^2 = 9 + 16$
Donc : $BC^2 = 25$, d'ou : $BC = \sqrt{25}$
Alors $BC = 5cm$

Remarque

☆ Le théorème de Pythagore vous permet de calculer la longueur d'un coté d'un triangle si on sait les longueurs des deux autres cotés

☆ Dans la dernière étape du calcul, nous avons besoin de la racine carrée pour supprimer le carré, cette racine est supprimée elle même si le nombre est un carré parfait, si non elle reste, mais on peut utiliser la calculatrice, pour trouver une valeur approchée

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

☆ On appel carré parfait le carré d'un nombre entier positif
Voici la liste des dix premiers carrés parfaits

Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Carré	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Application

Soit EFG un triangle rectangle en E tel que : $EF = 8$ et $FG = 10$
Calculer EG

Solution

On a EFG est un triangle rectangle en E
Donc d'après le théorème de Pythagore, on a : $FG^2 = EF^2 + EG^2$
C'est à dire : $10^2 = 8^2 + EG^2$, donc $100 = 64 + EG^2$
Donc $EG^2 = 100 - 64$, donc $EG^2 = 36$
D'où : $EG = \sqrt{36}$
Alors : $EG = 6$

Remarque

✹ ***Conséquence de la proposition :***
Dans un triangle, si le carré de la longueur du plus grand coté n'est pas ègale à la somme des carrés des longueurs des deux autres cotés, alors ce triangle n'est pas rectangle

II Cosinus d'un angle aigu

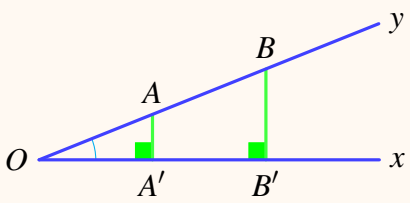
Activité

Soit $\widehat{xOy}$ un angle aigu (voir figure)

1 En utilisant le codage de la figure, montrer que lesd roites (AA') et (BB') sont parallèles

2 a Justifier pourquoi on a : $\dfrac{OA'}{OB'} = \dfrac{OA}{OB}$

b En déduire que : $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB4}{OB}$



3 Soit C un point de la demi-droite $[Oy)$ (autre que O, A et B), et C' son projeté orthogonal sur la demi-droite $[Ox)$
Montrer que : $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OC'}{OC}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

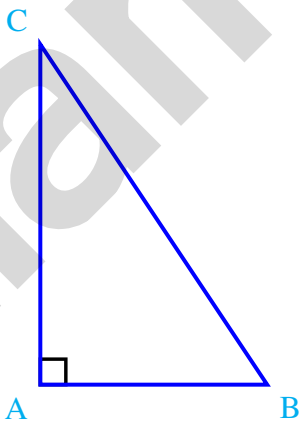
Définition

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égale au quotient de la longueur du coté adjacent de cet angle par la longueur de l'hypoténuse de ce triangle

✿ Vocabulaire :

ABC est un triangle rectangle en A (voir figure ci-dessous)

- $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont les deux angles aigus
- $[AB]$ est le coté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$ et il est lo coté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$
- $[AC]$ est le coté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$ et il est lo coté opposé à l'angle $\widehat{ABC}$
- $[BC]$ est l'hypoténuse



$$\cos \text{angle} = \frac{\text{Longueur du coté adjacent à cet angle}}{\text{Longueur de l'hypoténuse}}$$

- $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}$
- $\cos\widehat{ACB} = \dfrac{AC}{BC}$

⚠

- Le cosinus de n'importe quel angle aigu est toujours positif et inférieur à 1, c'est à dire : Si x est une mesure d'un angle aigu, alors $0 < \cos x < 1$
- Le rapport trogonométrique cos n'a pas d'unité
- Pour calculer $\cos 37°$ par exemple, on utilise ta touche cos dans la calculatrice
- On peut écrire $\cos\widehat{ABC}$ ou $\cos\widehat{B}$ si on a pas d'ambigité
- Si ABC est un triangle rectangle en A, alors les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont complémentaires, c'est à dire : $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$

Exemple

1 Soit EFG un triangle rectangle en E tel que : Voir figure ci-contre (figure 1)
Calculer $\cos\widehat{EFG}$ et $\cos\widehat{EGF}$

2 Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $AB = 5cm$ et $\widehat{ABC} = 60°$
Calculer BC et AC

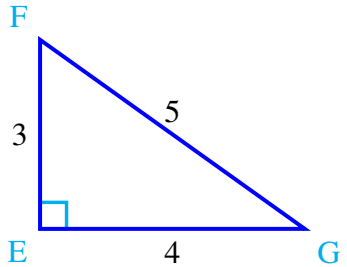


figure 1

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Solution

1

★ $\cos\widehat{EFG} = \dfrac{EF}{FG} = \dfrac{3}{5} = 0.6 < 1$

★ $\cos\widehat{EGF} = \dfrac{EG}{FG} = \dfrac{4}{5} = 0.8 < 1$

2

★ ABC est un triangle rectangle en C, donc $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{BC}{AB}$

Donc $\cos 60° = \dfrac{BC}{AB}$

C'est à dire $\dfrac{1}{2} = \dfrac{BC}{5}$

Donc $BC = \dfrac{5}{2} = 2.5cm$

★ On a $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} = 90°$, donc $60° + \widehat{BAC} = 90°$

Donc $\widehat{BAC} = 90° - 60° = 30°$

On a alors $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AC}{AB}$, donc $\cos 30° = \dfrac{AC}{5}$

Donc $AC = 5 \times \cos 30°$ (avec $\cos 30° \approx 1.86$)

Donc $AC = 5 \times 0.86 = 4.3cm$ (Valeur approchée)

Application

Soit EFG un triangle rectangle en E tel que : $EF = 6cm$ et $EG = 8cm$

Calculer $\cos\widehat{EFG}$ et $\cos\widehat{EGF}$

Remarque

Pour calculer les cosinus des angles $\widehat{EFG}$ et $\widehat{EGF}$, dans cette application, on a besoin de la longueur de l'hypoténuse FG

C'est pourquoi, on utilise le théorème de Pythagore pour calculer la longueur de FG

Solution

Le triangle EFG est rectangle en E

Donc d'après le théorème de Pythagore, on a : $FG^2 = EF^2 + EG^2$

C'est à dire $FG^2 = 6^2 + 8^2$

Donc $FG^2 = 36 + 64 = 100$

Donc $FG = \sqrt{100}$

Alors $FG = 10$

On a : $\cos\widehat{EFG} = \dfrac{EF}{FG} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

Donc $\cos\widehat{EFG} = 0.6$

Et $\cos\widehat{EGF} = \dfrac{EG}{FG} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

Donc $\cos\widehat{EGF} = 0.8$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today