ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Rattrapage juillet 2017

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Éxpérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** ..... **3 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **3 points**
- Exercice 3 : **Calcul des probabilités** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **Suites numériques** ..... **2.5 points**
- Problème : **Étude d'une fonction et calcul intégral** ..... **8.5 points**

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$ et le plan (P) d'équation : $y - z = 0$.

0.5 **1 - a)** Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1, 1, 1)$ et son rayon est 2.

0.5 **b)** Calculer $d(\Omega, (P))$ et en déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C).

0.5 **c)** Déterminer le centre et le rayon du cercle (C).

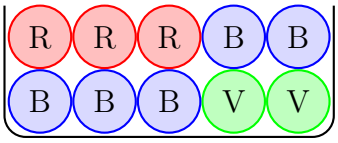
2 - Soit (Δ) la droite passant par le point $A(1, -2, 2)$ et orthogonale au plan (P).

0.25 **a)** Montrer que $\vec{u}(0, 1, -1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

0.75 **b)** Montrer que $\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{2}\|\vec{u}\|$ et en déduire que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.

0.5 **c)** Déterminer les coordonnées de chacun des deux points de contact de la droite (Δ) et la sphère (S).

Exercice 2 : (3 pts)



Une urne contient *dix* boules indiscernables au toucher : *cinq* boules blanches, *trois* boules rouges et *deux* boules vertes (voir la figure ci-contre).

On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.

1.5 **1 -** Soit A l'événement :

"Parmi les quatre boules tirées, il y 'a une seule boule verte seulement ".

et B l'événement :

"Parmi les quatre boules tirées, il y 'a exactement trois boules de même couleur".

Montrer que $p(A) = \dfrac{8}{15}$ et que $p(B) = \dfrac{19}{70}$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules vertes tirées.

0.5 **a)** Montrer que $p(X = 2) = \dfrac{2}{15}$.

1 **b)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et montrer que l'espérance mathématique est égale à $\dfrac{4}{5}$.

Exercice 3 : (3 pts)

0.75 **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

Yassine Elamri

$$z^2 + 4z + 8 = 0$$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tel que :

$$a = -2 + 2i,\ b = 4 - 4i \text{ et } c = 4 + 8i.$$

0.5 **a)** Soit z l'affixe d'un point M du plan et z ' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Montrer que : $z' = -iz - 4$.

0.75 **b)** Vérifier que le point B est l'image du point C par la rotation R et en déduire la nature du triangle ABC.

3 - Soit ω l'affixe du point Ω milieu du segment $[BC]$.

0.5 **a)** Montrer que $|c - \omega| = 6$.

0.5 **b)** Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z - \omega| = 6$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 4 : (2.5 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 17 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 12 \text{ pour tout entier naturel } n.$$

0.5 **1 - a)** Montrer par récurrence que : $u_n > 16$ pour tout entier naturel n.

0.5 **b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2 - Soit (v_n) la suite numérique tel que : $v_n = u_n - 16$ pour tout entier naturel n.

0.5 **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

0.5 **b)** En déduire que $u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout entier naturel n puis déterminer la limite de la suite (u_n).

0.5 **c)** Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n < 16,001$.

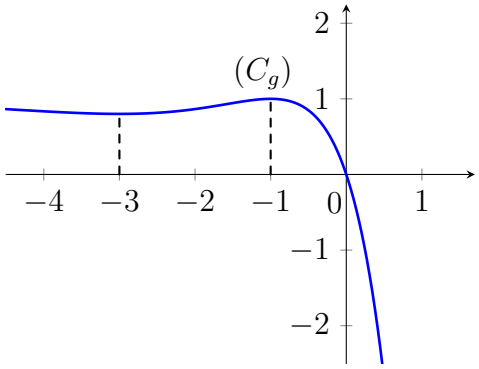
Problème : (8.5 pts)

partie I : Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - (x+1)^2 e^x$.

0.25 **1 -** Vérifier que : $g(0) = 0$.

2 - A partir de la représentation graphique de la fonction g (voir figure ci-après)

Yassine Elamri



1 pt Montrer que $g(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]-\infty, 0]$ et que $g(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$.

partie II : On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 1 - \left(x^2 + 1\right) e^x$$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 2 cm).

0.75 **1 - a)** Vérifier que : $f(x) = x + 1 - 4\left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$ pour tout réel x puis en déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

0.5 **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)]$ et en déduire que la droite (D) d'équation $y = x+1$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

0.25 **c)** Montrer que la courbe (C_f) est au-dessous de la droite (D).

0.5 **2 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

(on pourra écrire $f(x)$ sous la forme $x\left[1 + \frac{1}{x} - \left(x + \frac{1}{x}\right) e^x\right]$)

0.25 **b)** Montrer que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.

0.75 **3 - a)** Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout réel x.

b) Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ et décroissante

0.75 sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

0.75 **c)** Montrer que la courbe (C_f) possède un deux points d'inflexion d'abscisses -3 et -1 .

1 **4 -** Construire, dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C_f).

(on prendra $f(-3) \approx -2,5$ et $f(-1) \approx -0,7$).

0.5 **5 - a)** Vérifier que la fonction $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ puis montrer que : $\int_{-1}^{0} xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$.

Yassine Elamri

0.75 **b)** Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\int_{-1}^{0} \left(x^2+1\right) e^x dx = 3\left(1-\frac{2}{e}\right).$$

0.5 **c)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), la droite (D), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x=-1$.

FIN

Yassine Elamri