Structures algébriques

Exercice : 1

On définit sur l'ensemble $]-1;1[$ la relation $\top$ tel que : $x \top y = \dfrac{x+y}{1+xy}$; $\forall (x;y) \in (]-1;1[)^2$
Montrer que $\top$ est une loi de composition interne dans $]-1;1[$

Exercice : 2

On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Calculer A^2 et A^3 et en déduire A^n ; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Exercice : 3

On munit $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définie par : $x * y = xy - 3x - 3y + 12$; $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$ et soit $S =]3;+\infty[$
Montrer que S est une partie stable pour $(\mathbb{R}, *)$

Exercice : 4

1. On munit $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définie par : $a * b = a + b - 3ab$; $\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$
   Montrer que $*$ est commutative et associative.
2. On muni $\mathbb{R}^2$ d'une loi de composition interne $\top$ définit par :
   $(a;b) \top (x;y) = (ax; ay+b)$; $\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$
   Montrer que $\top$ est commutative et ni associative dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice : 5

On muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définie par : $a * b = ab - (a+b) + 2$; $\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$

1. Montrer que $*$ est commutative
2. Montrer que $*$ admet un élément neutre et déterminer les éléments symétrisables.

Yassine Elamri

Exercice : 6

Soit l'application : $\begin{array}{rccc} f : & (\mathbb{Z},+) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}^*,\times) \\ & x & \longmapsto & 5^x \end{array}$

Montrer que f est un morphisme de $(\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{Z}^*,\times)$

Exercice : 7

On munit $\mathbb{R}^2$ de la loi de composition interne suivante :
$(a;b)*(a';b') = (a\times a';b\times b')$; $\forall (a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall (a';b')\in\mathbb{R}^2$

1. Montrer que $*$ est commuative et associative.
2. Montrer que $*$ admet un élément neutre et déterminer dans $\mathbb{R}^2$ les éléments symétrisables pour la loi $*$
3. Soit $S = \mathbb{R}\times\{0\}$
   a. Montrer que S est une partie stable de $(\mathbb{R}^2,*)$
   b. Montrer que $(S,*)$ admet un élément neutre et comparer les éléments neutres de $(\mathbb{R}^2,*)$ et de $(S,*)$

Exercice : 8

1. On munit $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définie par : $x*y = x+y-xy$; $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2$
   Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ tel que : $f(x) = 1-x$; $\forall x\in\mathbb{R}$
   Montrer que f est un homomorphisme bijectif de $(\mathbb{R},*)$ dans $(\mathbb{R},\times)$
2. En déduire que $*$ est associative et que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera
3. Déterminer l'ensemble des éléments symétrisables pour la loi $*$
4. Soit $a\in\mathbb{R}$ calculer : $A = \underbrace{a*a*\ldots*a}_{n\ fois}$ $n\in\mathbb{N}^*$

Exercice : 9

On pose : $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall (x;y)\in I^2$

On munit I de la loi de composition interne définie par : $x*y = \arctan(-1+\tan x+\tan y)$

Montrer que $(I,*)$ est un groupe commutatif.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exercice : 10

On munit $\mathbb{R}^2$ d'une loi de composition interne $\top$ définie par :
$(x;y)\top(x';y') = \left(x+x';ye^{x'}+y'e^{-x}\right)$; $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2$ et $(x';y')\in\mathbb{R}^2$
Montrer que $\left(\mathbb{R}^2,\top\right)$ est un groupe non commutatif.

Exercice : 11

On considère l'ensemble des matrices suivante :
$E = \left\{M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} / \, a\in\mathbb{R}\right\}$
Montrer que E n'est pas un sous-groupe de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+)$

Exercice : 12

On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne définie par :
$x*y = x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$; $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2$

1. Soit l'application $f:\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par :
   $f(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$
   Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(\mathbb{R},*)$
2. En déduire la structure de $(\mathbb{R},*)$

Exercice : 13

On considère l'ensemble suivant :
$E = \left\{a+b\sqrt{3}/\ (a;b)\in\mathbb{Q}^2\right\}$

1. Montrer que $(E,+)$ est un groupe commutatif.
2. Montrer que E est une partie stable de $(\mathbb{Q},\times)$
3. Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

Exercice : 14

Soit $(A,+,\times)$ un anneau tel que : $x^2 = x$; $\forall x\in A$
($(A,+,\times)$ s'appelle anneau de **Boole**)

1. calculer $(x+x)^2$
2. En déduire que : $x+x = 0_A$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

(0_A est l'élément neutre de $(A,+)$)

3. Soient : $x \in A$ et $y \in A$
   a. Calculer $(x+y)^2$ en fonction de x et y
   b. En déduire que $(A,+,\times)$ est commutatif.
   c. En déduire : $xy(x+y)$
4. On suppose que : $x \neq 0_A$ et $y \neq 0_A$ et $y \neq x$
   1. montrer que :
   $$x+y \neq 0_A \quad et \quad x+y \neq y$$
5. Déterminer le tableau de la somme pour les éléments : 0_A, x, y, $x+y$

Exercice : 15

On considère l'ensemble des matrices suivante :
$E = \left\{ M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

1. Montrer que $(E,+)$ est un groupe commutatif
2. Montrer que E est une partie stable de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\times)$
3. Soit f l'application qui associe à chaque matrice $M_{(a,b)}$ de $E\backslash\{O_2\}$ le nombre complexe : $a+ib\sqrt{2}$ de $\mathbb{C}^*$
   a. Montrer que f est un morphisme bijectif de $(E\backslash\{O_2\},\times)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$
   b. En déduire la structure de $(E\backslash\{O_2\},\times)$
4. Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today