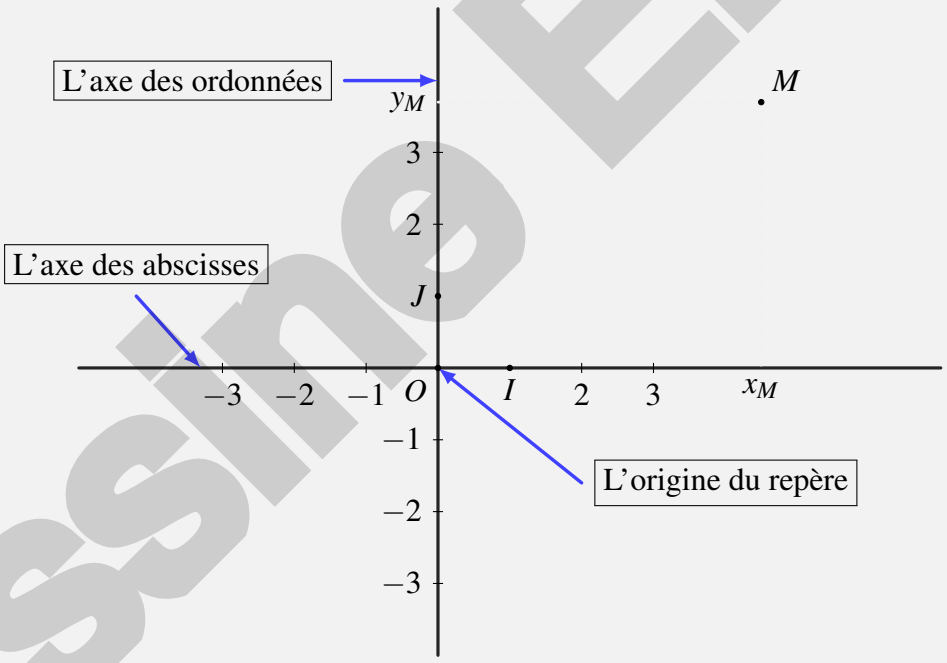
Le repère dans le plan

I Les coordonnées d'un point

1 Repère orthonormé du plan

Soient O, I et J trois points du plan tel que $(OI) \perp (OJ)$ et $Oi = Oj = 1$
☆ Le repère $(O;I;J)$ s'appelle repère orthonormé
On dit que le plan est rapporté à un repère orthonormé (O ;I ;J)
☆ Le point O est appelé l'origine du repère
☆ La droite (OI) est appelée l'axe des abscisses
☆ La droite (OJ) est appelée l'axe des ordonnées



2 Les coordonnées d'un point

Définition

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé , pour tout point M, il existe un couple unique de nombre réels $(x_M;y_M)$ appelé couple de coordonnées du point M
✪ x_M est appelé l'abscisse de M
✪ y_M est appelé l'ordonnée de M
Et on écrit : $M\,(x_M;y_M)$

Yassine Elamri

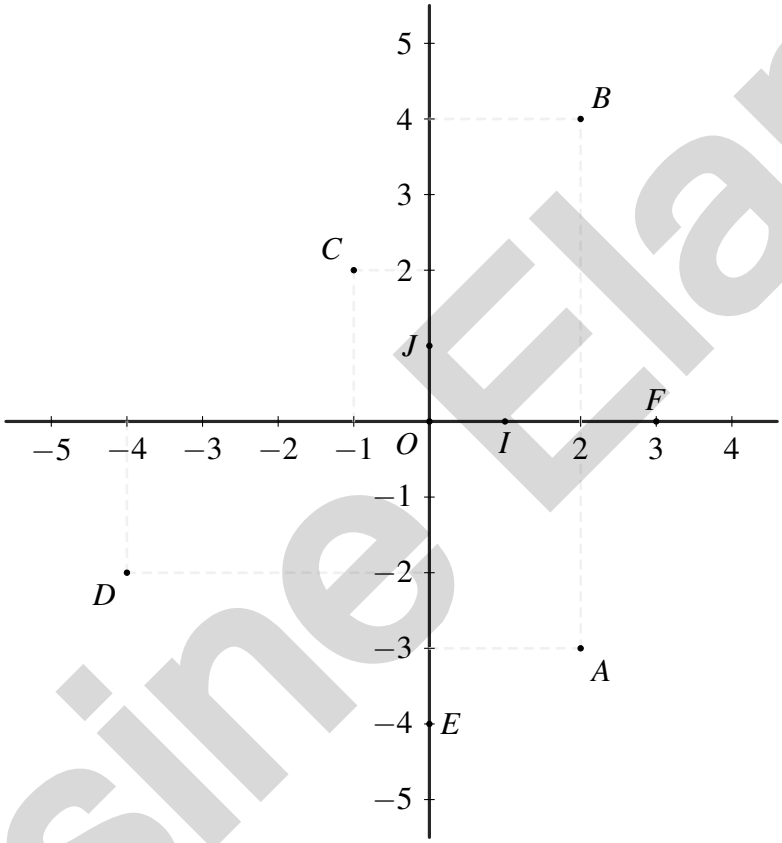
https://steinmath.com

• Exemple

Le plan est rapporté à un repère orthonormé
Placer les points : $A\,(2;-3)$, $B\,(2;4)$, $C\,(-1;2)$, $D\,(-4;-2)$, $E\,(0;-4)$ et $F\,(3;0)$

Solution

Plaçons les points A, B, C, D, E et F dans un repère orthonormé



⚠
★ Si $(O;I;J)$ est un repère orthonormé , donc $O\,(0;0)$, $I\,(1;0)$ et $J\,(0;1)$
★ Si M est un point de l'axe des abscisses, donc $y_M = 0$ et on écrit : $M\,(x_M;0)$
★ Si M est un point de l'axe des ordonnées, donc $x_M = 0$ et on écrit : $M\,(0;y_M)$

3 Les coordonnées du milieu d'un segment

Définition

Soit $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{B}\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$ deux points du plan

Si M est le milieu du segment $[AB]$, alors $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

Et on écrit $\overrightarrow{M}\begin{pmatrix}\dfrac{x_A + x_B}{2}\\\dfrac{y_A + y_B}{2}\end{pmatrix}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Exemple

Soient $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{B}\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}$

Déterminer les coordonnées du point E milieu du segment $[AB]$

Solution

On a $x_E = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-2+4}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

Et $y_E = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{6-8}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$

Donc $\overrightarrow{E}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Application

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé , on considère les points $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{B}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{C}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{D}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

1. Déterminer les coordonnées du point E milieu du segment $[AC]$
2. Déterminer x et y sachant que E est le milieu du segment $[BD]$

Solution

Soient $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{B}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{C}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{D}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

1. Déterminons les coordonnées du point E

   E est milieu du segment $[AC]$ donc $\overrightarrow{E}\begin{pmatrix}\dfrac{-2+3}{2}\\[2mm]\dfrac{1-2}{2}\end{pmatrix}$

   Alors $\overrightarrow{E}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\[2mm]\dfrac{-1}{2}\end{pmatrix}$

2. Déterminons x et y

   E est milieu du segment $[BD]$ donc $x_E = \dfrac{x_B + x_D}{2}$ et $y_E = \dfrac{y_B + y_D}{2}$

   C'est à dire $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2+x}{2}$ et $\dfrac{-1}{2} = \dfrac{2+y}{2}$

   Donc $1 = 2+x$ et $-1 = 2+y$

   D'ou $x = -1$ et $y = -3$

   Alors $\overrightarrow{D}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

II Les coordonnées d'un vecteur

1 Les coordonnées d'un vecteur

Définition

Dans un repère orthonormé (O ;I ;J) , soient les points $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{B}\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$

Et on écrit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$

• Exemple

Soient les points $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{B}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{C}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

1 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

2 Déterminer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Solution

1 ✳ Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-2\\-4-3\end{pmatrix}$

Alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-7\end{pmatrix}$

✳ Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$

On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C - x_A\\y_C - y_A\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-2\\2-3\end{pmatrix}$

Alors $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

2 Déterminons les coordonnées du point E

On a $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x_E - x_A\\y_E - y_A\end{pmatrix}$, c'est à dire $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x_E - 2\\y_E - 3\end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ donc $x_E - 2 = 1$ et $y_E - 3 = 1$

D'ou $x_E = 1 + 2 = 3$ et $y_E = 1 + 3 = 4$

Alors $\overrightarrow{E}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

2 Égalité de deux vecteurs

Proposition

Soient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ signifie que $x=x'$ et $y=y'$

C'est à dire que deux vecteurs sont égaux, si leurs coordonnées sont égaux

• Exemple

Soient $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{B}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{C}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{D}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

Comparer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$

Solution

Comparons $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$

On a $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}\\ \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}x_C-x_D\\y_C-y_D\end{pmatrix}\end{cases}$

donc $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-2\\4-3\end{pmatrix}\\ \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-1-3\\2-1\end{pmatrix}\end{cases}$

D'où $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}\\ \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}\end{cases}$

Alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

Application

On considère les points $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{B}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{C}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$

Déterminer le couple des coordonnées du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme

Solution

Déterminons les coordonnées du point D

$ABCD$ est un parallélogramme ,
signifie que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

C'est à dire que : $\begin{cases}x_B-x_A=x_C-x_D\\ y_B-y_A=y_C-y_D\end{cases}$

Donc $\begin{cases}4-2=-6-x_D\\ -1+2=-2-y_D\end{cases}$

Donc $\begin{cases}2=-6-x_D\\ 1=-2-y_D\end{cases}$

Donc $\begin{cases}x_D=-6-2=-8\\ y_D=-2-1=-3\end{cases}$

Alors $\overrightarrow{D}\begin{pmatrix}-8\\-3\end{pmatrix}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

3 Les coordonnées de la somme (la différence) de deux vecteurs

Proposition

Soient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs

On a $\begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}\\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\end{pmatrix}\end{cases}$

• Exemple

Soient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ deux vecteurs

Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$

Solution

✳ Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

On a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3+2\\-1-4\end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}$

✳ Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$

On a $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3-2\\-1+4\end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

Application

On considère les points $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{B}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{C}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{D}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{M}\begin{pmatrix}-7\\21\end{pmatrix}$

1 Déterminer x et y sachant que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

2 Montrer que $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

Solution

1 Déterminons x et y

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-2\\5+1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$

Et on a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3-2\\7+1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-5\\8\end{pmatrix}$

D'ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1-5\\6+8\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-4\\14\end{pmatrix}$

Et on a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x-2\\y+1\end{pmatrix}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ signifie que : $\begin{cases} x-2=-4 \\ y+1=14 \end{cases}$ c'est à dire $\begin{cases} x=-4+2=-2 \\ y=14-1=13 \end{cases}$

Alors $\overrightarrow{C}\begin{pmatrix}-2\\13\end{pmatrix}$

2 Montrons que $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

On a $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}-7+3\\21-7\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}-4\\14\end{pmatrix}$

Et on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-4\\14\end{pmatrix}$

Alors $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

4 Les coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel

Proposition

Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur et k un nombre réel

Alors $k\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}ka\\kb\end{pmatrix}$

• Exemple

On considère le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

Déterminer les coordonnées de $2\overrightarrow{AB}$ et $-4\overrightarrow{AB}$

Solution

✳ Déterminons les coordonnées de $2\overrightarrow{AB}$

On a $2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\times 3\\2\times -1\end{pmatrix}$

donc $2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$

✳ Déterminons les coordonnées de $-4\overrightarrow{AB}$

On a $-4\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\times 3\\-4\times -1\end{pmatrix}$

donc $-4\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-12\\4\end{pmatrix}$

Application

On considère les points $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{B}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{C}\begin{pmatrix}4\\11\end{pmatrix}$

Montrer que les points A, B et C sont alignés

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Solution

Montrons que les points A, B et C sont alignés
Pour montrer que les points A, B et C sont alignés, on montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$
On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-2\\5+1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$
Et on a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-2\\11+1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\12\end{pmatrix}$
On a $2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\12\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$
D'ou les points A, B et C sont alignés

III La distance entre deux points

Proposition

Dans un repère orthonormé , si on a $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{B}\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$
Alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

⚠ Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ alors $AB = \sqrt{x^2+y^2}$

• Exemple

Soient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ un vecteur, et $\overrightarrow{E}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{F}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ deux points du plan rapporté à un repère orthonormé
Calculer AB et EF

Solution

✯ Calculons AB
On a $AB = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \sqrt{5^2}$
Alors $AB = 5$
✯ Calculons EF
☆ Méthode ① Proposition 4
On a $EF = \sqrt{(0-3)^2+(-2-1)^2} = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$
Alors $EF = 3\sqrt{2}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

☆ Méthode ② Passage par $\overrightarrow{EF}$

On a $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}0-3\\-2-1\end{pmatrix}$, donc , $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$

D'ou $EF=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$

Alors $EF=3\sqrt{2}$

Application

Dans un repère orthonormé , on considère les points $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{B}\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{C}\begin{pmatrix}11\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{D}\begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix}$

Montrer que $ABCD$ est un rectangle

Solution

Montrons que $ABCD$ est un rectangle

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\9-5\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

Et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}11-9\\5-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, c'est à dire que $ABCD$ est un parallélogramme

☆ Montrons que ABC est un triangle rectangle en B

On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}11-3\\5-9\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}$

Et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}11-1\\5-5\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}$

Et on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

On a donc $\begin{cases}AB=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\\AC=\sqrt{10^2+0^2}=\sqrt{100+0}=\sqrt{100}\\BC=\sqrt{8^2+(-4)^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}\end{cases}$

D'ou $\begin{cases}AB^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2=20\\AC^2=\left(\sqrt{100}\right)^2=100\\BC^2=\left(4\sqrt{5}\right)^2=80\end{cases}$

On a $AB^2+BC^2=AC^2$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en B

Alors $ABCD$ est un rectangle

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today