Chapitre

l'Arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

I PGCD & PPCM .

1 Rappel et Complément .

D **Définition**

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.le plus grand commun diviseur de a et b, qu'on note $a \wedge b$ ou $PGCD(a,b)$, est le plus grand des diviseurs communs à a et b.
Le plus petit commun multiple de a et b, qu'on note $a \vee b$ ou $PPCM(a,b)$, est le plus petit des multiples strictement positifs communs à a et b.
On Convient que : $a \wedge 0 = |a|$ et $a \vee 0 = 0$.

Remarque

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. Si $d = a \wedge b$ et $m = a \vee b$ alors :

1. $d \geqslant 1$ et d/a et d/b
2. $m \geqslant 1$ et a/m et b/m
3. $\forall c \in \mathbb{N}^* : [(c/a \text{ et } c/b) \Longrightarrow c/d]$ et $[(a/c \text{ et } b/c) \Longrightarrow m/c]$.
4. $\forall c \in \mathbb{N}^* : [(c/a \text{ et } c/b) \Longrightarrow c \leqslant d]$ et $[(a/c \text{ et } b/c) \Longrightarrow m \leqslant c]$.
5. $|a| \wedge |b| = d$ et $a \wedge 1 = 1$ et $a \wedge aa \wedge 0 = |a|$.
6. $|a| \vee |b| = m$ et $a \vee 1 = |a|$ et $a \vee a = |a|$.

Propriété

Soient a , b et c trois entiers relatifs non nuls, soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

1. $a \wedge b = b \wedge a$. et $a \vee b = b \vee a$
2. $a/b \Longleftrightarrow a \wedge b = |a| \Longleftrightarrow a \vee b = |b|$
3. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.
4. $(ca \wedge cb) = |c|(a \wedge b)$.
5. $\begin{cases} c/a \\ c/b \end{cases} \Longrightarrow (\frac{a}{c}) \wedge (\frac{b}{c}) = \frac{a \wedge b}{|c|}$.
6. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.
7. $(ca \vee cb) = |c|(a \vee b)$.
8. $\begin{cases} c/a \\ c/b \end{cases} \Longrightarrow (\frac{a}{c}) \vee (\frac{b}{c}) = \frac{a \vee b}{|c|}$.
9. $a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$ et $a^n \vee b^n = (a \vee b)^n$.
10. $(a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$

Yassine Elamri

2 Calcul du PGCD : Algorithme d'Euclide.

Propriété

Soit $a \in \mathbb{Z}^*$ et $b \in \mathbb{N}$
Lorsque b ne divise pas a, alors le $PGCD(a,b)$ est égale au dernier reste non nul obtenu grâce à l'algorithme d'Euclide

3 Nombres premiers entre eux .

D **Définition**

soient a et b deux entiers relatifs non nuls.
On dir que a et b sont premiers entre eux si leurs PGCD vaut 1 c'est à dire : $a \wedge b = 1$.

T **Théorème**

soient a et b deux entiers relatifs non nuls, et $d \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$d = a \wedge b \Longleftrightarrow \left[(\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2)/ a = \alpha d \quad \text{et} \quad b = \beta b \quad \text{et} \quad \alpha \wedge \beta = 1\right]$$

T **Théorème**

soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$:
On a l'implication suivante :
$d = a \wedge b \Longleftrightarrow \left[(\exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2)/ \quad d = au + bv\right]$.

Remarque

le couple (u,v) n'est pas **unique**.En effet :
$9 \wedge 4 = 1 = 1 \times 9 - 2 \wedge 4 \quad (u = 1 \quad et \quad v = -2)$
$9 \wedge 4 = -43 \times 9 + 97 \times 4 \quad (u = -43 \quad et \quad v = 97)$.
La réciproque du dernier théorème n'est pas toujours vraie, ainsi $3 \times 5 + 7 \times (-1) = 8$ mais $3 \wedge 7 \neq 8$

4 Théorème de Bezout

Application

En utilisant le theoreme de Bezout, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $(5n+3) \wedge (2n+1) = 1$.
2. $(2n-1) \wedge (3-7n) = 1$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

5 Détermination des coefficient du théorème de Bezout

l'inconvénient du théorème de Bezout, sous sa forme théorique, est qu'il fournit pas les coefficients u et v intervenant dans la relation $au+bv=1$.
l'algorithme d'Euclide fournit une telle réponse pratique à ce problème.

T **Théorème**

Soient a,b et c des entiers relatifs non nuls.On a l'implication suivante :
$(a/bc \quad \text{et} \quad a\wedge b=1) \Longrightarrow a/c$. ce résultat est connu sous le nom du ❝Théorème de Gauss❞

Remarque

dans le dernier théorème, la condition de primalité $a\wedge b=1$des deux relatifs a et b est nécessaire , en effet $8/48$ et $12/48$ mais 12×8 ne divise pas 48

Propriété

soient $a,b \quad \text{et} \quad c$ trois entiers relatifs non nuls.alors :

1. $(a\wedge b=1 \quad \text{et} \quad a\wedge c) \Longleftrightarrow a\wedge bc=1$.
2. $\forall (m,n)\in \mathbb{N}^{*2} : (a\wedge b=1 \Longleftrightarrow a\wedge b^n=1) \quad \text{et} \quad (a\wedge b=1 \Longleftrightarrow a^m\wedge b^n=1)$

6 L'équation diophantienne : $ax+by=c$

T **Théorème**

Si le couple (x_0,y_0) est une solution de l'équation $ax+by=c$, alors l'ensemble des solutions de cette équation est : $\mathscr{S}=\left\{\left(x_0+\dfrac{bk}{a\wedge b};y_0-\dfrac{ak}{a\wedge b}\right)/k\in\mathbb{Z}\right\}$

7 PGCD et PPCM d'un nombre fini d'entiers relatifs

D **Définition**

Soit n un entier naturel tel que $n\geqslant 2$, et soient $a_0,a_1,a_2\cdots\cdots a_n$ des entiers relatifs non nuls.
Le plus grand commun diviseur des ces entiers qu'on note $a_1\wedge a_2\wedge a_3\cdots\wedge a_n$ est le plus grand diviseur commun positif à $a_2,a_2,a_3\cdots a_n$.
Le plus petit commun multiple des ces entiers qu'on note $a_1\vee a_2\vee a_3\cdots\vee a_n$ est le plus petit multiple commun positif à $a_2,a_2,a_3\cdots a_n$.

T **Théorème**

Soit n un entier naturel tel que $n\geqslant 2$, et soient $a_0,a_1,a_2\cdots\cdots a_n$ des entiers relatifs non nuls.Il existe des entiers relatifs $u_1,u_2,\cdots u_n$ tel que : $\sum_{i=1}^{n}a_iu_i=\delta$ avec δ désigne le plus grand diviseur commun de $a_1,a_2\cdots a_n$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

D **Définition**

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$, et soient $a_0, a_1, a_2 \cdots\cdots a_n$ des entiers relatifs non nuls. On dit que les entiers $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ sont premiers entre eux si 1 est le seul diviseur positif commun à tous ces entiers, c'est à dire que : $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots\cdots \wedge a_n = 1$.

Remarque

1. Dire que les entiers sont premiers entre eux, signifie pas qu'il sont premiers entre eux deux à deux, en effet $a =, b = 7$ et $c = 12$ sont premiers entre eux, par contre $a \wedge c = 4 \geq 1$.
2. La relation $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$ n'est pas valable pour plus de deux entiers relatifs. c'est à dire en général : $(a \wedge b \wedge c)(a \vee b \vee c) \neq |abc|$.
3. Le résultat de ce théorème reste valable pour plus de deux entiers relatifs , plus précisément : $(n \geqslant 2), \delta = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$ signifie qu'il existe $(a_1, a_2, \cdots\cdots a_n) \in \mathbb{Z}^n : \sum_{i=1}^{n} a_i u_i = 1$. autrement dit :

$$(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n = 1) \Longleftrightarrow \left[\exists (u_1, u_2 \cdots u_n) \in \mathbb{Z}^n : \sum_{i=1}^{n} a_i u_i = 1\right]$$

8 Congruence modulo n (Rappel et complément)

D **Définition**

soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que deux entiers a et b sont congrus modulo n si l'entier n divise $b - a$, c'est à dire $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que : $b = a + kn$, et on écrit : $a \equiv b[n]$

Propriété

soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation de ❝ Congruence modulo n ❞ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$, c'est à dire :

1. Réflexive : $(\forall a \in \mathbb{Z}) : a \equiv a[n]$.
2. Symétrique : $\left(\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right) : a \equiv b[n] \Longrightarrow b \equiv a[n]$.
3. Transitive : $\left(\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3\right) : a \equiv b[n] \quad \text{et} \quad b \equiv c[n] \Longrightarrow a = c \equiv [n]$.

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$ .Alors :

1. $a \equiv b[n] \Longleftrightarrow$ (les restes de la division euclidienne de a t et b par n sont égaux)
2. Si $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$ alors $a + c \equiv b + d[n]$ et $ac \equiv bd[n]$
3. Si $a \equiv b[n]$ et $k \in \mathbb{Z}^*$ alors $ka \equiv kb[n]$
4. Si $a \equiv b[n]$ et $p \in \mathbb{N}$ alors $a^p \equiv b^p[n]$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

T **Théorème**

Soient $a,b,c \in \mathbb{Z}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $d = c \wedge n$ alors : $ac \equiv bc[n] \Longleftrightarrow a \equiv b\left[\frac{n}{d}\right]$

Propriété

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^{*,3}$ et soit $(n,p) \in \mathbb{N}^{*,2}$ tel que : $c \wedge n = 1$, Alors :

1. $ac \equiv bc[n] \Longleftrightarrow a \equiv b[n]$
2. $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ p/n \end{cases} \Longrightarrow a \equiv b[p]$
3. $\begin{cases} ac \equiv bc[p] \\ n \text{ne divise pas} \end{cases} \Longrightarrow a \equiv b[p]$

II Les Nombres Premiers

1 Rappel et complément

D **Définition**

Un entier relatif p est dite **Premier** s'il admet exactement quatre diviseurs.

Remarque

Si p est un entier premier dans $\mathbb{N}$, alors $-p$ est premier dans $\mathbb{Z}$, c'est pourquoi dans cette section nous nous limitons à l'ensemble $\mathbb{N}$.L'ensemble des nombres premiers positifs et noté $\mathbb{P}$, et un entier $n \geqslant 2$ non premier est dit Composé.

T **Théorème**

Soit n un entier composé supérieur ou égale à 2, Alors :

1. Le plus petit diviseur positif de n différent de 1 est un nombre premier.
2. n est un produit de nombres premiers, en particulier n possède au moins un diviseur premier.
3. n possède un facteur premier p tel que : $p^2 \leqslant n$

T **Théorème**

L'ensemble $\mathbb{P}$ est un ensemble **Infini**

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

T **Théorème**

1. Si p et q sont deux nombres premiers positifs distincts, alors ils sont premiers entre eux. en d'autre terme : $p,q \in \mathbb{P}$ et $p \neq q \Longleftrightarrow p \wedge q = 1$.
2. si $p \in \mathbb{P}$ alors p est premier avec tous les entiers qu'il ne divise pas, c'est à dire : $(\forall a \in \mathbb{Z})(\forall p \in \mathbb{P}) : [(\ p \quad \text{ne divise pas}\ ) \Longrightarrow p \wedge a = 1]$

Propriété

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ et p un nombre premier, alors :

$$p/ab \quad \Longleftrightarrow \quad (p/a \quad ou \quad p/b)$$

COROLAIRE

⁕ Soient $a_1, a_2, \cdots a_n$ des entiers relatifs et soit p un nombre premier, alors :

$$p/\ a_1.a_2.....a_n \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists i \in \{1,2,\cdots\cdots n\} :\ p/a_i)$$

⁕ Soit $a \in \mathbb{Z}$ et p un nombre premier, alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad p/a^n \quad \Longleftrightarrow \quad p/a.$$

⁕ Soient $p_1, p_2, \cdots p_n$ et p des nombres premiers, alors :

$$p/p_1.p_2 \cdots p_n \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists i \in \{1,2,\cdots,n\} : \quad p = p_i)$$

2 Petit théorème de FERMAT

T **Théorème**

1. Si p est un nombre premier positif, alors pour tout $a \in \mathbb{Z}$, alors p divise $a^p - a$, autrement : $(\forall a \in \mathbb{Z}) : a^p \equiv a[p]$
2. Si p est un nombre premier positif, alors pour tout $a \in \mathbb{Z}$: $p \wedge a = 1 \Longleftrightarrow a^{p-1} \equiv 1[p]$

Remarque

La réciproque du théorème de FERMAT n,est pas vraie, en effet si $a^{p-1} \equiv 1[p]$ alors l'entier p n'est pas forcement un nombre premier.A titre d'exemple soit $p = 341 = 31 * 11$ n'est pas premier, pourtant il divise $2^3 41 - 2$ car :
$2^{341} - 2 = 2(2^{340} - 1) = 2((2^{10})^{34} - 1) = 2(2^{10} - 1)\sum_{k=0}^{3} 32^{10k} = 2 * 3 * 341 * \sum_{k=0}^{3} 32^{10k}$
Le petit théorème de FERMAT permet de calculer le reste de n'importe quel entier assez grand modulo un nombre premier positif p.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

3 Décomposition en produit de facteurs premiers

T **Théorème**

Tout élément de $\mathbb{Z}^* - \{-1,1\}$admet une décomposition en produit de nombre premiers, unique à l'ordre prés des facteurs. Autrement dit, si $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1,1\}$, il existe $N \in \mathbb{N}^*, \varepsilon \in \{-1,1\}$ des nombres premiers deux à deux distincts $p_1, p_2, \cdots p_N$, et des entiers $\alpha_1, \alpha_2 \cdot, \alpha_N$ tels que : $n = \varepsilon . p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot p_N^{\alpha_N}$.
Ce théorème est connu sous le nom du ❄Théorème fondamental de l'Arithmétique❄

4 Application de la décomposition en produit de facteurs premiers

T **Théorème**

Soit $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1,1\}$et sa décomposition $n = \varepsilon . p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot p_N^{\alpha_N}$ en produit de facteurs premier .
Les diviseurs de n sont les entiers relatifs : $d = \varepsilon' . p_1^{\gamma_1} . p_2^{\gamma_2} \cdot \cdots \cdot p_N^{\gamma_N}$ avec $0 \leqslant \gamma_k \leqslant \alpha_k, \forall k \in \{1,2,....N\}$ et $\varepsilon' \in \{-1,1\}$.
le nombre des diviseurs positifs de n vaut : $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_N)$

III L'Ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

1 Classe d'équivalence

D **Définition**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
L'ensemble des entiers relatifs qui ont le même reste r de la division euclidienne par n est appelé la classe d'équivalence de r, qu'on note $\bar{r}$.
C'est la classe d'équivalence de r modulo n dans $\mathbb{Z}$.
Généralisation : soit $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la classe d'équivalence de a modulo n est définie par :

$$\bar{a} = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \equiv a[n]\} = \{a + kn \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$$

Application

Déterminer la classe d'équivalences modulo 12 de chacun des nombres suivants :

116 1979 2018.

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on désigne par $\bar{x}$ la classe d'équivalence de x modulo n.Alors :

1. $(\forall a \in \mathbb{Z})\,(\exists! r \in \{0,1,2,\cdots,n-1\})$: $\quad \bar{a} = \bar{r}$.
2. Si $0 \leqslant r < n$ et $0 \leqslant r' < n$ alors : $\bar{r} = \bar{r'} \Longleftrightarrow r = r'$ et $r \neq r' \Longleftrightarrow \bar{r} \bigcap \bar{r'} = \emptyset$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

3 $(\forall x \in \mathbb{Z})\,(\exists! r \in \{0,1,2,\cdots,n-1\}) : x \in \bar{r}$ (avec r est le reste de la division euclidienne de x par n).

4 $\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup \cdots\cdots \cup \overline{(n-1)}$.

5 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\bar{0};\ \bar{1};\ \bar{2};\ \cdots\cdots \overline{(n-1)}\right\}$

2 Opérations dans l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

D **Définition**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On définit l'addition dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme suit : $\bar{x}+\bar{y} = \overline{x+y} \quad \forall \bar{x},\bar{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
On définit la multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme suit : $\bar{x}\times\bar{y} = \overline{x\times y} \quad \forall \bar{x},\bar{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Application

Résoudre dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ les equations suivantes :

1 $\bar{4}x = \bar{2}$

2 $\bar{3}x^2 + x + \bar{1} = \bar{0}$

T **Théorème**

Soit p un nombre premier positif. Alors :

1 $(\forall \bar{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{\bar{0}\})\ (\exists \bar{y} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{\bar{0}\}) : \bar{x}\times\bar{y} = \bar{1}$.

2 $(\forall (\bar{x};\bar{y}) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2)\ [\bar{x}\times\bar{y} = \bar{0} \iff (\bar{x} = \bar{0} \quad \text{ou} \quad \bar{y} = \bar{0})]$

IV Système de Numération

1 Représentation d'un entier naturel dans un système de numération

D **Définition**

la base b d'un système de numération représente le nombre d'unités d'un certain rang, nécessaire pour former une unité de rang immédiatement supérieur.
L'ensemble $\mathscr{B}_b = \{0,1,2,\cdots\cdots,(b-1)\}$, soit b caractères (chiffre en base 10) quantifie le nombre d'unités d'un rang quelconque.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

T **Théorème**

Soit b un entier naturel supérieur ou égale à 2.
Tout entier naturel non nul $n$peut de manière unique sous la forme :

$$n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \cdots\cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

où $a_0, a_1, \cdots, a_m$ sont des entiers tels que : $a_m \neq 0$ et $0 \leqslant a_i \leqslant b-1 \quad \forall i \in \{0,1,2,\cdots\cdots,m\}$
On écrit : $n = \overline{a_m a_{m-1} \cdots\cdots a_1 a_0}_{(b)}$.et On dit qu'on a représenter le nombre n dans le système de numération de base b

Application

1 Convertir en binaire les nombres suivants :

$$97; \quad 397; \quad 133$$

2 Convertir en numération décimale les nombres dont l'écriture en binaire est :

$$\overline{101}_{(2)} \qquad \overline{1101110}_{(2)}$$

2 Comparaison de deux nombre présentés dans le même système de numération

T **Théorème**

Soient x et y deux entiers naturels représentés dans le même système de numération par :

$$x = \overline{a_n a_{n-1} \cdots\cdots a_1 a_0}_{(b)} \text{ et } y = \overline{c_m c_{m-1} \cdots\cdots c_1 c_0}_{(b)}$$

1 Si $m > n$ alors $y > x$

2 Si $m = n$ et $c_n = a_n$ et $c_{n-1} = a_{n-1}$ et $\cdots\cdots$ et $c_{i+1} = a_{i+1}$ et $c_i \neq a_i$, alors l'ordre de x et y est celui de c_i et a_i, En particulier si $c_i > a_i$ alors $y > x$

3 Addition et multiplication de deux nombre représentés dans le même système de numér

1 On considère les deux nombres suivants : $x = \overline{5312}_{(6)}$ et $y = \overline{214}_{(6)}$.
On veut représenter le nombre $x+y$ en base 6.
On a : $x = 5\times 6^3 + 3\times 6^2 + 6 + 2$ et $y = 2\times 6^2 + 6 + 4$
Par conséquent : $x+y = 5\times 6^3 + 5\times 6^2 + 3\times 6 + 2 = \overline{5530}_{(6)}$.
On peut représenter le nombre $x+y$ directement en base 6 en utilisant la méthode vue en primaire ❝l'addition par retenue❞ comme suit :

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ \overline{5312}_{(6)} \\ + \\ \overline{214}_{(6)} \\ \hline = \overline{5530}_{(6)} \end{array}$$

2 On considère les deux nombres suivants : $a = \overline{432}_{(5)}$ et $b = \overline{134}_{(5)}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

On veut représenter le nombre $a \times b$ en base 5.
On a $a = 4 \times 5^2 + 3 \times 5 + 2$ et $b = 5^2 + 3 \times 5 + 4$._ Par conséquent :

$$\begin{aligned} a \times b &= (4 \times 5^2 + 3 \times 5 + 2)(5^2 + 3 \times 5 + 4) \\ a \times b &= 5^5 + 3 \times 5^4 + 5^3 + 4 \times 5 + 3 \\ a \times b &= \overline{131043}_{(5)} \end{aligned}$$

Tout comme l'addition , on peut representer le nombre $a \times b$ directement dans la base 5 en utilisant la méthode de ❝la multiplication par retenue❞ comme suit :

$$\begin{array}{r} \overset{1}{\overline{432}_{(5)}} \\ \times \\ \overline{134}_{(5)} \\ \hline 333 \\ + \\ 2401\bullet \\ + \\ 432\bullet\bullet \\ \hline = \overline{131043}_{(5)} \end{array}$$

4 Critère de divisibilité sur les nombres : 3; 4; 5; 9; 11; 25

Proposition

Soit $x \in \mathbb{N}$ tel que $x = \overline{a_n a_{n-1} \cdots\cdots a_1 a_0}_{(10)} = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 \times 10 + a_0$ avec $a_n \neq 0$ et $0 \leqslant a_i \leqslant 10 \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots\ldots, n\}$.
On a les conséquences suivantes :

1. $x \equiv 0[5] \iff (a_0 = 0 \quad \text{ou} \quad a_0 = 5)$
2. $x \equiv 0[25] \iff \overline{a_1 a_0}_{(10)} \equiv 0[25]$
3. $x \equiv 0[4] \iff \overline{a_1 a_0}_{(10)} \equiv 0[4]$
4. $x \equiv 0[3] \iff \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0[3]$
5. $x \equiv 0[9] \iff \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0[9]$
6. $x \equiv 0[11] \iff \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i \equiv 0[11]$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today