Vecteurs et translation

PARTIE 1 : LES VECTEURS

I Le vecteur

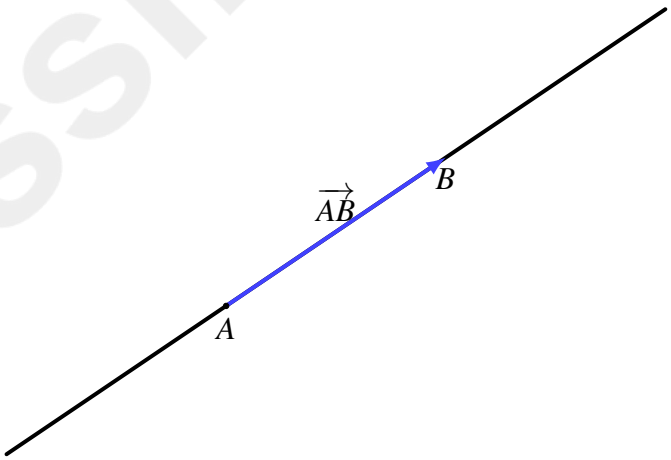
1 Caractéristique d'un vecteur non nul

Définition

Soient A et B deux points différents du plan
Le couple (A,B) détermine le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de varactéristiques :

- ☆ La direction : c'est la droite (AB)
- ☆ Le sens : c'est le sens de la demi droite $[AB)$, c'est à dire de A vers B
- ☆ La norme (Le module) : c'est la distance AB
- ☆ Le point A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$
- ☆ Le point B est l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$

✿ Figure géométrique :



Yassine Elamri

2 Vecteur nul

Définition

★ Chaque point A détermine un vecteur nul $\overrightarrow{AA}$ noté $\overrightarrow{O}$ et on écrit $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{O}$
★ Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}$ alors $A = B$ (C'est à dire que les points A et B sont confondus)

Remarque

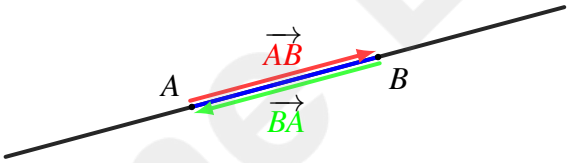
La norme d'un vecteur nul est zéro, mais la direction et le sens ne sont pas définies

3 L'opposé d'un vecteur

Définition

Soient A et B deux points du plan
On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{O}$
Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ s'appelle le vecteur opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et on écrit $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

✿ Figure géométrique :



II Égalité de deux vecteurs

1 Définition

Définition

☆ Dire que deux vecteurs sont égaux, signifie qu'ils ont la même direction, le même sens et la même norme
☆ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que :
➨ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction, c'est à dire que : $(AB) \parallel (CD)$
➨ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens
➨ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même norme, c'est à dire que $AB = CD$

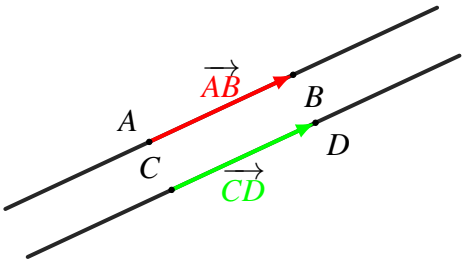
Remarque

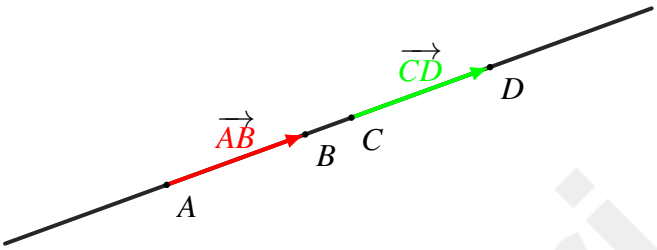
Même direction signifie que leurs directions sont soit deux droites strictement parallèles, soit deux droites confondues

Kassine Elamri

✿ Figure géométrique :

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$





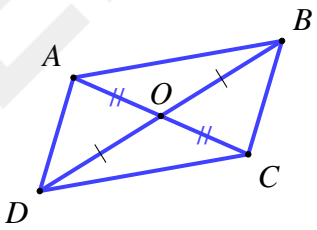
2 Propriétés importantes

Propriété

☆ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ est équivalent à dire que les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu
☆ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ est équivalent à dire que $ABCD$ est un parallélogramme

✿ Figure géométrique :

Soit $ABCD$ est un parallélogramme
On a
❶ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
❶ les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu O



Remarque

$ABCD$ est un parallélogramme signifie que : $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ ou bien } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \text{ ou bien } \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} \end{cases}$

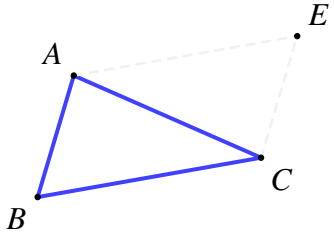
Application

Soit ABC un triangle

1 Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$ | 2 Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$

Solution

1 Construisons le point E



2 Montrons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$
On a $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$, donc $AECB$ est un parallélogramme
Alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$

Yassine Elamri

III Somme de deux vecteurs

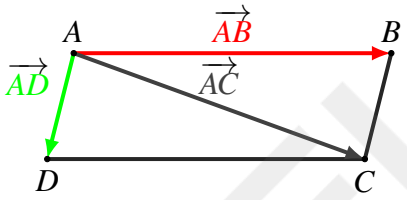
1 Définition

Définition

On dit que le vecteur $\overrightarrow{ac}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ si $ABCD$ est un parallélogramme et on écrit $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

✿ Figure géométrique :

$ABCD$ est un parallélogramme , donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$



❀ Récapitulatif d'un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme

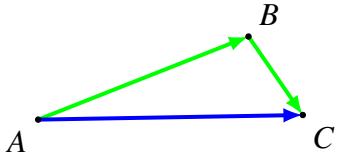
❶ $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\\ \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}\end{cases}$ ❷ $\begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}\\ \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}\\ \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}\end{cases}$ ❸ $[AC]$ et $[BC]$ ont le même milieu

2 Relation de Chasles

Proposition

Si A, B et C sont trois points du plan, alors : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
Cette relation s'appelle Relation de Chasles

✿ Figure géométrique :



On a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Yassine Elamri

• Exemple

Simplifier les expressions suivantes :
① $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ ② $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}$ ③ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DC}$

Solution

Simplifions :
① $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{O}$
② $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$
③ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$

Application

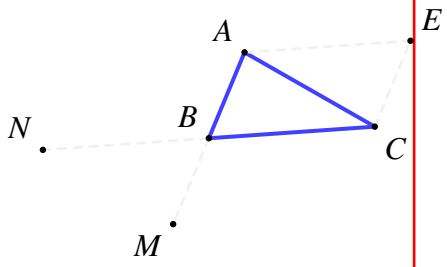
Soit ABC un triangle

1 a Construire le point E tel que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}$
b Construire M et N les symètriques respectives de A et C par rapport à B
2 Montrer que : $\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NM}$

Solution

1 a On a $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}$, donc $AECB$ est un parallélogramme

b On a M et N les symétriques respectives de A et C par rapport à B, donc B est le milieu des segments $[AM]$ et $[CN]$
Construisons une figure



2 Montrons que : $\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NM}$
On a M et N les symètriques respectives de A et C par rapport à B
Donc B est le milieu des segments $[AM]$ et $[CN]$
D'où $ANMC$ est un parallélogramme , alors $\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NM}$

Yassine Elamri

IV Produit d'un vecteur par un nombre réel

1 Définition

Définition

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul, et k un nombre réel
On appelle le vecteur $\overrightarrow{AM}$ le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le réel k si M est un point de la droite (AB) et on écrit : $\overrightarrow{AM} = k \times \overrightarrow{AB}$ ou tout simplement $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

- ✶ Si $k > 0$ alors $AM = kAB$ et $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens
- ✶ Si $k < 0$ alors $AM = -kAB$ et $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont des sens opposés
- ✶ Si $k = 0$ alors A et M sont confondus

Remarque

★ $0 \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}$ et $k \times \overrightarrow{O} = \overrightarrow{O}$

• Exemple

Soit ABC un triangle
Construire les point E et F tel que : $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{BC}$

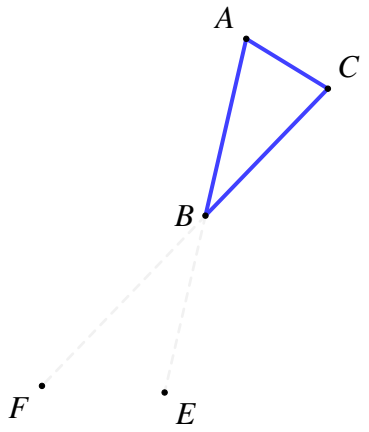
Solution

On a $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$

Donc $\begin{cases} ✷E \in (AB) \\ ✷\overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ ont le même sens} \\ ✷AE = 2AB \end{cases}$

Et on a $\overrightarrow{BF} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{BC}$

Donc $\begin{cases} ✷F \in (BC) \\ ✷\overrightarrow{BF} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ ont des sens opposés} \\ ✷BF = \frac{3}{2}BC \end{cases}$



Yassine Elamri

2 Vecteurs et milieu

Proposition

dire que M est le milieu du segment $[AB]$ signifie que : $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{O} \\ \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB} \end{cases}$

Remarque

On utlise souvent $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

3 Propriétés importantes

Propriété

Soit k un nombre réel non nul

- Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors les points A, B et C sont alignés
- Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{MN}$, alors $(AB) \parallel (MN)$, on dit que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires

Application

Soit $ABCD$ un parallélogramme et E un point tel que : $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
Montrer que les points D, C et E sont alignés

Solution

Montrons que les points D, C et E sont alignés
On a $ABCD$ un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
Or $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$
D'où les points D, C et E sont alignés

Application

Soit ABC un triangle et E et F deux points tel que : $\overrightarrow{AE} = \frac{-7}{5}\overrightarrow{BC}$ et C le milieu du segment $[BF]$
Montrer que : $(AE) \parallel (CF)$

Solution

Montrons que : $(AE) \parallel (CF)$
On a C est le milieu de $[BF]$ donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CF}$

Yassine Elamri

Or $\overrightarrow{AE} = \frac{-7}{5}\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{AE} = \frac{-7}{5}\overrightarrow{CF}$
D'où $(AE) \parallel (CF)$

Yassine Elamri

PARTIE 2 : LA TRANSLATION

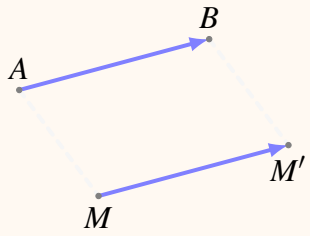
V La translation

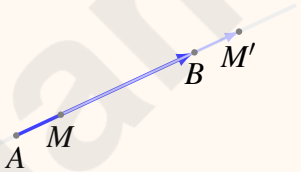
1 Activités

Activité

Soient A ; B et M trois ponts du plan

Construire, dans chacun des cas, le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$





$ABM'M$ est un parallélogramme

Dans chacun des cas, on dit que le point M' est l'image du point M par la translation T de vecteur $\overrightarrow{AB}$ (la translation qui transforme A en B)

2 Définition

Définition

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul, et M un point du plan

On dit que le point M' est l'image du point M par la translation T de vecteur $\overrightarrow{AB}$ (la translation qui transforme A en B) si $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$, c'est à dire que $ABM'M$ est un parallélogramme

3 Propriétés caractéristiques

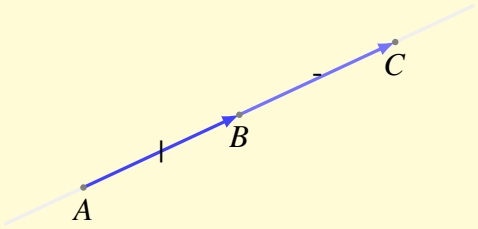
Propriété

Si M' et N' sont respectivement les images de M et N par translation T, alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

Remarque

Soit $T_{\overrightarrow{AB}}$ la translation de vacteur $\overrightarrow{AB}$, alors, l'image de A par la translation T est le point B et l'image de B par la translation T est le point C tel que B soit le milieu du segment $[AC]$

Yassine Elamri



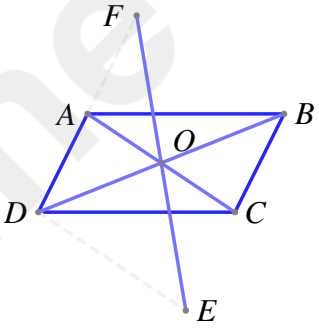
Application

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O

1. Construire le point E image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$
2. Construire F symétrique du point D par rapport au point A
3. Montrer que O est le milieu du segment $[EF]$

Solution

1. Le point E est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$
   Donc $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}$
2. F est le symétrique de D par rapport à A
   Donc $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AF}$
   Construisons la figure



3. Montrons que O est le milieu de $[EF]$
   On a E est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$
   Donc $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}$
   Alors $ACED$ est un parallélogramme
   Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$ ❶
   Or F est le symétrique de D par rapport à A
   Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FA}$ ❷
   De ❶ et ❷ on trouve que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FA}$
   Ce qui signifie que $FAEC$ est un parallélogramme de diagonales $[EF]$ et $[AC]$
   Comme O est milieu de $[AC]$ (car centre du parallélogramme $ABCD$)
   Alors O est le milieu de $[EF]$

Yassine Elamri

VI L'image de quelque figure par une translation

1 L'image d'une droite

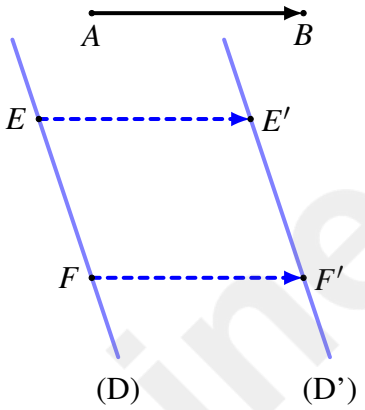
Proposition

L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle

⚠ Pour construire l'image d'une droite par une translation, on construit les images de deux points de cette droite par la translation

✿ Figure géométrique :

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et (D) une droite
Construisons (D') l'image de la droite (D) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$



On a $(D) \parallel (D')$

Proposition

Les images des points alignés par une translation sont aussi alignés. On dit que la translation conserve l'alignement des points

Application

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O

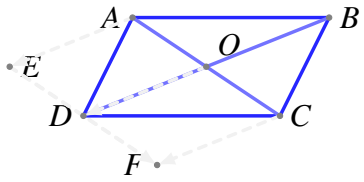
1. Construire le point E image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OD}$
2. Construire le point F image du point C par la même translation
3. Montrer que les points E, F et D sont alignés

Solution

1. E image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OD}$
   Donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OD}$

Yassine Elamri

2 F image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{OD}$
Donc $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{OD}$ Construisons la figure



3 Montrons que les points E, F et D sont alignés
On a les points E, F et D sont les images respectives des points A, C et O par la translation de vecteur $\overrightarrow{OD}$
Et on a A, C et O sont alignés, et on sait que la translation conserve l'alignement des points
Alors les points E, F et D sont alignés

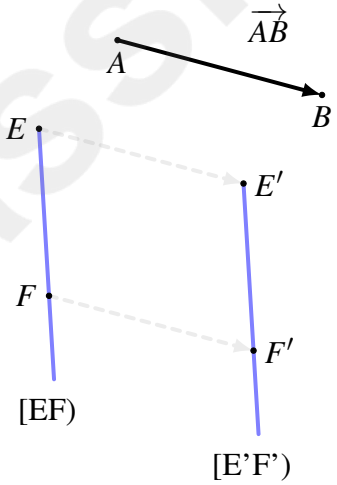
2 Image d'une demi droite

Proposition

L'image d'une demi-droite $[EF)$ par une translation est la demi-droite $[E'F')$ tel que E' et F' sont les images respectives de E et F par la même translation et on a $(EF) \parallel (E'F')$

✿ Figure géométrique :

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et $[EF)$ une demi-droite
Construisons la demi-droite $[E'F')$ l'image de la demi-droite $[EF)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$



On a $(EF) \parallel (E'F')$

Yassine Elamri

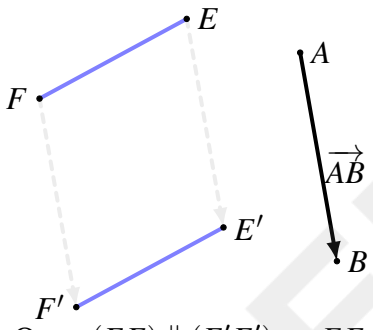
3 Image d'un segment

Proposition

L'image d'un segment par une translation est un segment de même longueur
On dit que la translation conserve la direction

✿ Figure géométrique :

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et $[EF]$ un segment
Construisons le segment $[E'F']$ l'image du segment $[EF]$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$



On a $(EF) \parallel (E'F')$ et $EF = E'F'$

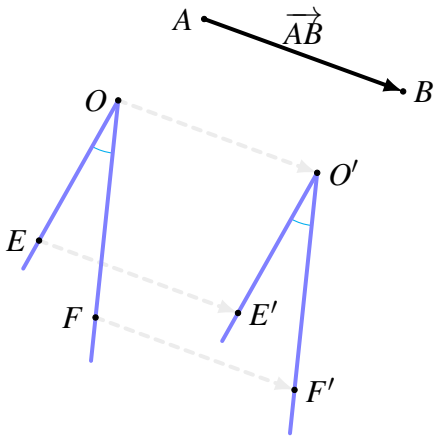
4 Image d'un angle

Proposition

L'image d'un angle par une translation est un angle de même mesure
On dit que la translation conserve la mesure des angles

✿ Figure géométrique :

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et $\widehat{EOF}$ un angle
Construisons l'angle $\widehat{E'O'F'}$ l'image de l'angle $\widehat{EOF}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$



On a $\widehat{EOF} = \widehat{E'O'F'}$

Yassine Elamri

5 Image d'un cercle

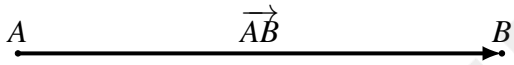
Proposition

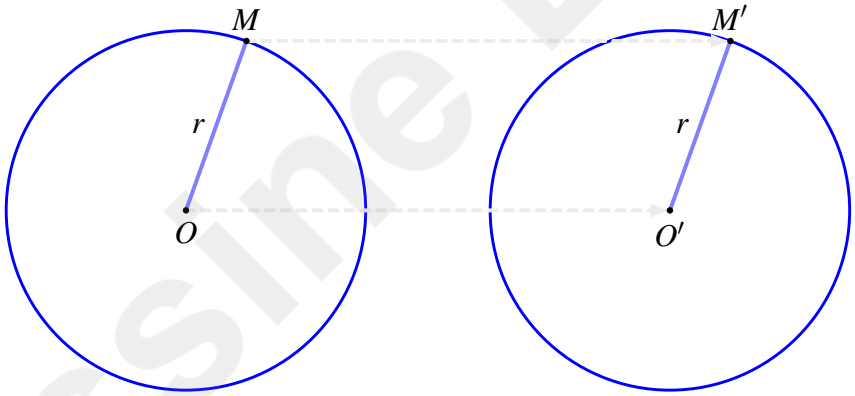
L'image d'un cercle (C) de centre O et de rayon r par une translation est le cercle (C') de centre O' l'image de O par la même translation et de même rayon r

⚠ Pour construire l'image d'un cercle par une translation, on construit l'image du centre par la même translation et on garde le même rayon

✿ Figure géométrique :

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et (C) un cercle de centre O et de rayon r
Construisons le cercle (C') l'image du cercle (C) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$





Application

Doit ABC un triangle tel que $AB = 4cm$ et $\widehat{BAC} = 70°$
On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{AC}$
Soient E et F les images respectives des points C et B par la translation t

1. Faire une figure
2. Montrer que $(BC) \parallel (EF)$
3. Calculer CF
4. Calculer $\widehat{FCE}$

Yassine Elamri

Solution

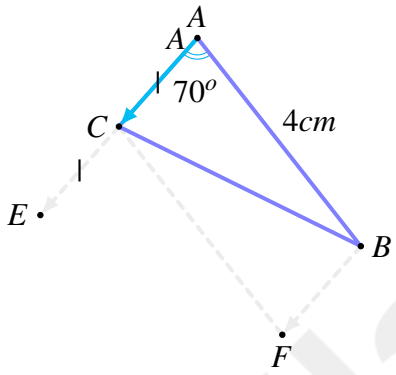
1 Faisons une figure

On a E est l'image de C par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CE}$, c'est à dire que C est le milieu du segment $[AE]$

Et on a F est l'image de B par la translation t

Donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF}$, c'est à dire que $ACFB$ est un parallélogramme



2 Montrons que $(BC) \parallel (EF)$

On a E et F sont les images respectives de C et B par la translation t

Donc la droite (EF) est l'image de la droite (BC) par la translation t

D'ou : $(EF) \parallel (BC)$

3 Calculons CF

t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, donc C est l'image de A par la translation t

Et puisque F est l'image de B part t et la translation coserve la distance

Donc $CF = AB$

Et comme $AB = 4cm$ Alors $CF = 4cm$

4 Calculons $\widehat{FCE}$

On a F, C et E sont les images respectives des points B, A et C par la translation t

Donc l'angle $\widehat{FCE}$ est l'image de l'angle $\widehat{BAC}$ par la translation t

Et comme la translation conserve la mesure des angles, donc $\widehat{FCE} = \widehat{BAC}$

Alors $\widehat{FCE} = 70°$

Yassine Flamri